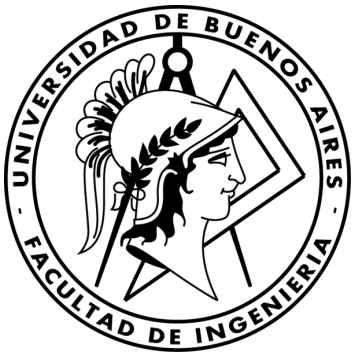


DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TESIS DE GRADO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Desarrollo de algoritmos de inferencia estadística para señales GPR-UWB

Nicolás Zilberstein

Director: Juan Augusto Maya
Co-director: Andrés Altieri

Febrero 2020

Índice general

1. Introducción **4**

2. Entorno de simulación: *gprMax* **8**
2.1. Resultados teóricos previos 9
2.1.1. Vector de Poynting 9
2.1.2. Diagrama de radiación 9
2.1.3. Cambio de coordenadas 10
2.1.4. Discretización del cálculo de la potencia radiada 11
2.2. Simulación dipolo 13
2.3. Simulación antena 15
2.3.1. Estado actual del hardware desarrollado 15
2.3.2. Sin reflector 19
2.3.3. Con reflector 22
2.4. Análisis del plano separador de las antenas Tx-Rx 26
2.5. Conclusiones del capítulo 29

3. Modelo de *scattering* electromagnético **30**
3.0.1. Ecuaciones de Maxwell 32
3.0.2. Solución para medio isotrópico y homogéneo 33
3.0.3. Solución para medio isotrópico con una interfaz 36
3.0.4. Solución para medio isotrópico con una interfaz y un blanco 38
3.0.5. Aproximación de Born 40
3.0.6. Reconstrucción de la imagen 41
3.1. Resolución numérica de la función de Green 43
3.2. Discretización del modelo 45
3.3. Algoritmo 46
3.4. Validación del modelo 47
3.5. Limitaciones en la reconstrucción de una imagen 49
3.5.1. Restricción en el dominio de observación 49
3.5.2. Resolución horizontal 52
3.5.3. Resolución Vertical 54
3.5.4. Muestreo en *cross - range* 55
3.5.5. Muestreo *depth - range* 56
3.5.6. Límite dado por la aproximación de Born 57
3.5.7. Resumen de los límites analizados 60
3.6. Conclusiones del capítulo 60

4. Algoritmo *Sparse Bayesian learning* **61**
4.1. Introducción . . . 62
4.1.1. *Compressive Sensing* . . . 63
4.2. Sparse Bayesian Learning . . . 64
4.2.1. Planteo del problema . . . 64
4.2.2. Distribución *a priori* jerárquica . . . 65
4.2.3. Representación gráfica . . . 66
4.2.4. Estimación . . . 67
4.2.5. *Type II maximum likelihood* . . . 68
4.2.6. *Fast Type II maximum likelihood* . . . 68
4.3. Aplicación a señales GPR-UWB . . . 72
4.3.1. Implementación numérica y algoritmo . . . 73
4.4. Calibración del algoritmo . . . 75
4.5. Conclusiones del capítulo . . . 75

5. Resultados **76**
5.1. Escenarios 2-D . . . 76
5.1.1. Escenario con un cilindro solo . . . 77
5.1.2. Concreto con roturas . . . 80
5.1.3. Concreto con tubo con secciones de aire . . . 82
5.1.4. Suelo . . . 84
5.2. Escenarios 3-D . . . 88
5.2.1. Cilindro en medio sin interfaz . . . 88
5.2.2. Tanque de agua sin interfaz . . . 94
5.2.3. Cilindro en medio con interfaz . . . 96
5.3. Conclusiones . . . 98

6. Conclusiones **99**
6.1. Trabajos futuros . . . 100

A. Cálculo del cambio de coordenadas **101**

B. Cálculo de la función de Green a través de Fourier **103**

C. Análisis de porque la solución es obtenida es *sparse* **107**

Agradecimientos

Resulta difícil creer que estoy escribiendo los agradecimientos de esta tesis después de tantos años de esfuerzo. Se me vienen muchas cosas a la cabeza, desde personas, momentos, decisiones u familia.

En primer lugar, quiero agradecer a ellos. En particular a mis viejos, que son los grandes responsables de que pueda haber estudiado. Sin su apoyo constante probablemente hoy no esté presentando esta tesis.

En segundo lugar, quisiera agradecer a mi director de esta tesis, Juan Maya. Dentro de las muchas virtudes que encuentro en él, a mi criterio la mas importante es la mas humanidad que hay en él y la vocación de enseñar y transmitir conocimiento con infinita paciencia. Quiero agradecerle en especial por haberme aceptado como tesista en un momento donde las cosas a nivel personal se me pusieron difíciles, y abrirme las puertas del laboratorio. Y no solo abrirme las puertas, sino también darme la posibilidad de trabajar por mas de 6 meses todos los días al lado de él. La experiencia de convivir en un ambiente de investigación fue de gran aprendizaje.

Al momento de agradecer a amigos y personas se me viene muchas personas a la cabeza, de diversos ámbitos.

De la facultad me llevo amistades y momentos no solo divertidos sino también de compartir esa pasión por la ingeniería. Quiero agradecer especialmente a Klaus Hass y Alan Rapoport con los cuales tuve la suerte de compartir muchos momentos; con uno compartí casi toda la carrera y fue un gran compañero, con el otro tuve la suerte de compartir el gusto por la matemática, cursando materias que difícilmente las haya hecho solo. También quiero mencionar a Aldo, Diego aka Rotor, Martin, Ignacio y el grupo del LAE.

También quiero agradecer a los distintos docentes que tuve a lo largo de la carrera, a los cuales admiro no solo por su conocimiento sino también por la vocación de enseñar.

Por fuera de la facultad, quiero agradecerle a mi grupo de amigos de toda la vida. Realmente creo ser un afortunado por cruzarme con tanta buena gente, no solo por permitirme salir del día a día sino también por haberme bancado en todo este proceso, soportando mis *nerdeadas*, nervios y también alegrías.

También quiero hacer mención especial de un grupo de gente que un corazón desmedido Dicho grupo se llama Pahiuén y engloba a gente que quiero mucho.

Por último, quiero hacer mención especial a la Universidad de Buenos Aires. He adquirido aquí no solo conocimiento técnico sino también social. Aprendí que como personas debemos involucrarnos en mejorar los espacios que ocupamos, y que para ello hay que luchar y salir del ego individual. Somos afortunados de tener acceso a una educación pública, gratuita y de excelencia.

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de este trabajo se aborda el problema de estimación y/o localización de blancos cuyas propiedades eléctricas sean distintas al medio en el que se encuentran. Estos objetos pueden ser tanto dieléctricos como conductores, y su forma geométrica puede variar. Para resolver este problema se utiliza un sistema que genera señales de ancho de banda ultra grande o UWB (ultra wideband). Este tipo de equipos se caracterizan por transmitir señales impulsivas de gran ancho de banda, y han sido utilizados en diversas aplicaciones; entre ellas, una aplicación importante es la detección de objetos enterrados en el suelo (*ground penetrating radar*).

La principal característica que presenta la tecnología UWB es lograr, a partir de su gran ancho de banda, una resolución mucho más fina respecto de los radares tradicionales de banda angosta, como así también poder extraer información de los objetos para caracterizar no solo la posición, sino también la forma, la orientación y composición.

Este tipo de sistemas requieren desarrollar técnicas de procesamiento de señales; en particular, poder describir la señal dispersa por el objeto a través un modelo. La gran dificultad radica en que dichos modelos suelen ser de gran complejidad. El estudio de técnicas eficientes, robustas y precisas para procesar los datos tiene mucho interés en la actualidad, ya que los resultados obtenidos post-procesamiento suelen ser difíciles de interpretar. Es necesario entonces poder combinar las técnicas de procesamiento de señales junto a modelos que permitan explicar los mecanismos de *scattering* de los objetos. Es por eso que en este trabajo se abordará el problema de inversión [1],[2], en donde se infieren los parámetros de interés a partir de mediciones. El problema inverso se formulará de la siguiente forma: en primer lugar se estudiará un modelo físico que permita describir la señal medida luego de que la radiación interactúa con el blanco y el escenario. Este modelo forma parte de una teoría mas general, conocida como la teoría de *scattering* [3], la cual ha cobrado atención en los últimos años. Por ejemplo, en [4], [5] se aborda un escenario compuesto por un medio estratificado en N capas, lo cual permite modelar escenarios mas complejos de forma más real. En nuestro caso, se trabajará con medios con una única interfaz. Para recrear dichos escenarios, se utilizará un simulador llamado *gprMax* [6]. Este software es *open source*, y permite modelar suelos con propiedades dieléctricas y geométricas realistas.

Existen diversos modelos para analizar señales obtenidas al iluminar un escenario [7]. Por ejemplo utilizar el modelo de rayos [8]. Otro ejemplo es el modelo de *scattering*, el cual utiliza la función de Green [3]. Para el caso de un escenario en dos dimensiones, si toma-

mos el caso TM[1] (transversal magnético), el campo de *scattering* medido en un punto $\mathbf{r}$ y a una cierta frecuencia ω_n estará dado por la solución de la ecuación de Helmholtz para una cierta fuente, donde aparece una función contraste la cual está vinculada a la permitividad compleja del medio y de los blancos, y es dicha función la que se busca estimar.

La dificultad de los problemas inversos suele ser que se encuentran mal condicionados (el número de mediciones es mucho menor a la cantidad de parámetros a estimar) y la relación entre mediciones y parámetros a estimar es no lineal. Para contrarrestar el primer problema, una alternativa que se utiliza es usar señales de gran ancho de banda para tener diversidad de frecuencia y medir en distintas posiciones espaciales de forma tal de obtener información adicional. En cuanto al problema no lineal, se puede utilizar aproximaciones para linealizar el problema; estas aproximaciones requieren de ciertas hipótesis. Ejemplos de estas aproximaciones son la de Born [9], [10], [11] o la de Rytov [11], [12]. En el caso de la aproximación de Born, lo que se toma como hipótesis es que el campo de *scattering* es de una amplitud mucho menor respecto al campo incidente.

Otra forma utilizada que podría mejorar el condicionamiento o mitigar el problema de mal condicionamiento es utilizar información *a priori* que se tenga disponible. En nuestro caso, los escenarios que se iluminan suelen tener blancos que ocupan una porción de área muy pequeña respecto del tamaño del lugar donde se encuentran. Esta información permite regularizar el problema de inversión imponiendo la característica *sparse* de la señal. Esto lleva a utilizar la teoría de sensado comprimido (*Compressed sensing*) [13] para estimar la señal. Dentro de esta teoría, existen diversos enfoques.

Un posible enfoque es resolver un problema de optimización tradicional, el cual se enmarca dentro de la teoría de *Compressed Sensing* [14]. Esto fue trabajado en diversos trabajos. La idea es resolver el siguiente problema de optimización con término de regularización

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}} \{||\mathbf{Z} - \mathbf{\Psi\Phi w}||_2^2 + \lambda||\mathbf{w}||_1\} \tag{1.1}$$

Por otro lado, un enfoque alternativo es el Bayesiano (*Bayesian Compressed Sensing*) [15], el cual relaja las hipótesis que se toman para el enfoque determinístico. Un algoritmo que implementa dicha técnica bayesiana es el *Relevance Vector Machine* [16], el cual modela la característica *sparse* a través del uso de una función de densidad *a priori* jerárquica. Entonces, definiendo la señal como:

$$t_n = y(\mathbf{x_n}, \mathbf{w}) + N \ \ , \ \ N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \tag{1.2}$$

y para el caso general

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} w_i K(x, x_i) + w_0 \tag{1.3}$$

el problema es obtener los parámetros w que maximizan la función de densidad *a posteriori*

$$p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2|\mathbf{t}) = p(\mathbf{w}|\mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)p(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2|\mathbf{t}) \tag{1.4}$$

donde aparece la función de densidad *a prori*. Los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ son los hiperparámetros que se modelan la condición *sparse*.

[1] También puede considerarse el caso TE (transversal eléctrico)

Resultados preliminares a la tesis y marco general

Esta tesis forma parte de un proyecto más general y ambicioso que es el desarrollo de una plataforma de radar UWB, desarrollado en cooperación entre diversas instituciones: el LPSC-FIUBA, el CSC-CONICET y el Laboratorio de Comunicaciones del INTI. El desarrollo implica tanto el *hardware* como el *software*.

En la actualidad, se tiene diseñado el primer prototipo de la plataforma, tanto las partes del sistema se encuentran diseñadas y construidas, como así también la integración, prueba y validación.

El estudio comenzó en el año 2015, estudiando tanto aspectos generales de diseño de hardware de RF como el problema específico de desarrollar e implementar un sistema UWB para un esquema de sensado. A continuación se describe de forma reducida los resultados alcanzados por todo el grupo de trabajo en el desarrollo de RF.

Motivación e interés del tema

La presente tesis se enmarca dentro de un proyecto mas general, que es el desarrollo de una plataforma de radar GPR-UWB. Los resultados que se puede llegar a obtener son de gran impacto, tanto a nivel aplicaciones como para el desarrollo de tecnología electrónica a nivel nacional.

Un ejemplo de aplicación es en la industria química o papel. Esta tecnología permitiría estimar parámetros de diversos materiales, como la humedad, densidad y concentración de diversas sustancias, los cuales pueden estar en cañerias o tolvas que son de difícil acceso [17], [18]. Resulta fundamental entonces el uso de sensores no invasivos que no requieran estar en contacto con el material. También resulta útil para industrias como la frutihortícola, para evaluar el estado de frutas, verduras, etc [19], [20], [21]. Otra ejemplo es el sensado del estado de estructuras, como concreto, en obras civiles [22].

Otro caso de aplicación es en el sector de ambiente y desarrollo sustentable, donde es importante desarrollar tecnologías que permitan el monitoreo del suelo y acuíferos para detectar la contaminación de los mismos. En particular, los líquidos iónicos juegan un papel importante en la caracterización de solventes ya que se encuentran relacionados fuertemente con su polaridad y presentan una fuerte correlación con el espectro de permitividad [23], [24], lo cual hace factible la detección de contaminantes a través de un sensor UWB.

Contribuciones de la tesis

Al momento de comenzar la tesis, el grupo de investigación recién estaba empezando a estudiar las técnicas de procesamiento de señales mencionadas previamente. Ante esto, la principal contribución de la tesis es estudiar el estado del arte de estos temas y armar un entorno de simulación completo: que genere señales sintéticas que se asemejen a las medidas y poder utilizarlas en algoritmos de inversión para obtener imágenes. Esto requirió llevar adelante un trabajo que incluyera la etapa de investigación, luego de implementación y validación de resultados.

A partir de esta tesis es posible utilizar el algoritmo implementado en señales reales, debiendo unicamente adaptar todo el estudio realizado en una FPGA para poder utilizar el radar en tiempo real.

Metodologlogía y división de la tesis

La tesis se encuentra dividida en cuatro capítulos: en el capítulo 2 se estudia un simulador (*gprMax*) diseñado para trabajar con problemas GPR. Se analiza su funcionamiento y se simula la antena del prototipo experimental del sistema UWB, validando su comportamiento comparándola contra el simulador HFSS. Para llevar a cabo dicha validación se desarrolló un *script* para calcular la ganancia de la antena.

Luego, en el capítulo 3, se presenta el modelo utilizado para representar el campo eléctrico de *scattering*. Se obtienen las ecuaciones que modelan el campo eléctrico y se analizan las principales limitaciones que tiene el modelo para poder armar un correcto banco de medición.

En el capítulo 4 se analiza un algoritmo de inferencia estadística orientado a estimar señales de tipo *sparse*.

Finalmente en el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos y en el capítulo 6 las conclusiones.

Capítulo 2

Entorno de simulación: *gprMax*

El objetivo de este capítulo es poder validar el correcto funcionamiento del software *gprMax* [6]. Este programa es de código abierto y esta diseñado para trabajar en escenarios donde se utilicen radares GPR. Entre otras cosas permite generar B-scan de antenas diseñadas por uno mismo, que son representaciones 2-D del campo recibido al iluminar un cierto escenario desde distintas posiciones; esta característica es muy importante ya que permite trabajar en medios controlados al poder generar señales sintéticas que sean realistas.

Para simular la propagación del campo electromagnético, resuelve de forma numérica las ecuaciones de Maxwell utilizando el algoritmo de Yee [25], el cual esta basado en el método FDTD (*Finite Difference Time Domain*), es decir, resuelve las ecuaciones en el dominio temporal. La solución que se obtiene es *full wave*, ya que resuelve las ecuaciones en 3-D, dando como resultado el campo electromagnético completo. Esto permite, por ejemplo, realizar simulaciones tanto en campo lejano como en campo cercano, característica que otros software no poseen.

Otra característica importante es que el lenguaje en el que está desarrollado es Python. Esto facilita en gran medida el armado de los escenarios y las antenas a través de *scripts* en dicho lenguaje, ademas de poder integrar al procesamiento y visualización de los datos las librerías estandar de Python.

Los escenarios que pueden simularse son desde los más simples hasta otros muy complejos. Dentro de los más complejos se encuentra, por ejemplo, un modelo del suelo de Peplinski, al cual se le puede variar distintos parámetros para variar las características del mismo. Este tipo de modelos, en software como el HFSS, no vienen integrados, y recrearlos es sumamente complejo.

La posibilidad de utilizar medios de alta complejidad, sumado a la posibilidad del diseño de una antena propia de diversas características, permite recrear escenarios muy similares a la realidad. Más aún, permite probar situaciones que con el hardware disponible no es posible.

Por otro lado, la directividad de la antena depende, en general, del medio iluminado. Por lo tanto, poder tener en cuenta las características, como por ejemplo suelo húmedo o seco, permite acercarse a un escenario mas real.

En términos de performance, el software puede correr en la CPU o en una GPU, lo que lo hace mucho mas rápido que otros programas de simulación.

Por último, cabe mencionar que en la actualidad se utiliza y se sigue mejorando. Todas estas características mencionadas lo hace muy interesante y es por eso que se estudió como

herramienta para recrear las distintos escenarios.

El capítulo se divide de la siguiente forma: en la primera sección se introducen los resultados teóricos preliminares que se utilizarán para luego poder realizar las distintas simulaciones. En las siguientes secciones, se validó el funcionamiento, simulando escenarios con distintos radiadores y se calculó a partir del campo electromagetico obtenido el diagrama de radiación para cada configuración. Fue necesario calcular la energía irradiada por las antenas, ya que el software viene con un script para graficarlo normalizado a 0 dB. Los radiadores fueron de menor a mayor en complejidad: el primero fue un dipolo infinitesimal, cuyo diagrama de radiación tiene una fórmula teórica. Luego se simuló para la antena y se lo comparó con el obtenido con el HFSS. Por último, se analizó, para el caso de la antena, el comportamiento para campo cercano.

2.1. Resultados teóricos previos

En esta primera parte, se introducen los resultados teóricos necesarios para entender las distintas simulaciones realizadas [26], [27]. Fundamentalmente se necesita poder calcular la energía total irradiada por una antena determinada, ya que es de interés calcular la directividad de las antenas, de forma tal de poder diseñar la antena y validar que su diseño es correcto.

2.1.1. Vector de Poynting

El vector de Poynting es un campo que describe la potencia asociada al campo electromagnético. Se define su valor como:

$$\mathbf{W}(x,y,z,t) = \mathbf{E}(x,y,z,t) \times \mathbf{H}(x,y,z,t) \quad [\mathrm{W\,m^{-2}}], \tag{2.1}$$

donde los campos son magnitudes instantáneas. La potencia instantánea total puede calcularse a través de una integral de superficie sobre una superficie cerrada S que encierre a la antena:

$$\mathcal{P}_i(t) = \oiint_S \mathbf{W}(x,y,z,t) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \mathrm{d}S \quad [\mathrm{W}]. \tag{2.2}$$

Para señales de energía, la energía total irradiada es:

$$\mathcal{E}_t = \int_0^\infty \mathcal{P}_i(t)\, \mathrm{d}t \quad [\mathrm{J}]. \tag{2.3}$$

2.1.2. Diagrama de radiación

El diagrama de radiación permite conocer la distribución de energía/potencia en el espacio, pudiendo a partir de esto observar, por ejemplo, en que dirección la antena transmite la mayor cantidad de potencia. Tipicamente se lo usa en condiciones de campo lejano. Sin embargo, en este trabajo se calculará el diagrama de radiación en condiciones que podrían no ser de campo lejano. Para su cálculo, en primer lugar se calcula la potencia total radiada; esta magnitud puede calcularse utilizando como superficie cerrada de integración la superficie

de una esfera de radio r y desarrollando la ecuación (2.3). Como consecuencia de tomar dicha superficie, la normal a la misma es $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_r$, siendo $\hat{\mathbf{a}}_r$ el vector unitario radial, por lo que la única componente de $\mathbf{W}(r,t)$ que influye en el cálculo es la radial, la cual corresponde a la componente escalar de $\mathbf{W}(r,t)$ asociada al vector radial. Entonces, $\mathcal{W}_r(r,\theta,\phi,t) = \mathbf{W}(r,t) \cdot \hat{\mathbf{a}}_r$. Reemplazando en (2.2) y (2.3):

$$\mathcal{E}_t = \int_0^\infty \Big\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\hat{\mathbf{a}}_r \, \mathcal{W}_r(r,\theta,\phi)) \cdot (\hat{\mathbf{a}}_r \, r^2 \, \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi) \Big\} \, \mathrm{d}t = 4\pi \, r^2 \, \mathcal{W}_r(r,\theta,\phi). \tag{2.4}$$

La densidad de energía es:

$$\mathcal{W}_r(r,\theta,\phi) = \frac{\mathcal{E}_t}{4\pi \, r^2}. \tag{2.5}$$

Se define el parámetro $U(r,\theta,\phi) = r^2 \mathcal{W}_r(r,\theta,\phi)$. En la condición de campo lejano, dicho parámetro se lo llama intensidad de radiación. Debido a que la componente radial del vector de Poynting tiene una dependencia con r proporcional a $\frac{1}{r^2}$, deja de depender del radio si $r \to \infty$.

$$U(\theta,\phi) = \lim_{r\to\infty} r^2 \mathcal{W}_r(r,\theta,\phi) \tag{2.6}$$

Se observa que dicho parámetro toma un valor en cada dirección dada por los valores de ϕ y θ, y no depende de la distancia a la antena.

Para la condición de campo cercano, usaremos una medida similar a la intensida de radiación, donde, en principio, esta depende del radio. Entonces, $U(r,\theta,\phi) = r^2 \mathcal{W}_r(r,\theta,\phi)$.

La intensidad de radiación puede vincularse con los campos de radiación eléctrico y magnético; los campos de radiación son los que describen la emisión de energía electromagnética de un radiador, dependen como $\frac{1}{r}$ y son perpendiculares entre si y a la dirección de propagación radial. Además, la relación entre ellos es $\frac{E_{rad}}{H_{rad}} = \eta_0$, siendo η_0 la impedancia intrínseca del medio:

$$U(\theta,\phi) = \frac{r^2}{2\eta_0} |E(r,\theta,\phi)|^2. \tag{2.7}$$

Para graficar el diagrama de radiación, se define la directividad como:

$$D(\theta,\phi) = \frac{r^2 W_r(r,\theta,\phi)}{\frac{\mathcal{E}_t}{4\pi}} = \frac{4\pi U(\theta,\phi)}{\mathcal{E}_t}. \tag{2.8}$$

A partir de la ecuación (2.4) y utilizando el parámetro $U(\theta,\phi)$, la energía total radiada puede calcularse como:

$$\mathcal{E}_t = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U(\theta,\phi) \, \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi. \tag{2.9}$$

2.1.3. Cambio de coordenadas

El simulador *gprMax* calcula los campos en un punto dado del espacio en coordenadas cartesianas. Para poder calcular los diagramas de radiación, se debe realizar el cambio a coordenadas esféricas. A continuación se desarrolla el cambio de coordenadas utilizado.

Dado un sistema de coordenadas, un campo vectorial puede expresarse a partir de sus componentes escalares y los versores asociados como:

$$\mathbf{A} = A_1\hat{\mathbf{e}}_1 + A_2\hat{\mathbf{e}}_2 + A_3\hat{\mathbf{e}}_3. \tag{2.10}$$

En el caso de coordenadas cartesianas, los versores $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ corresponden a los versores $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, los cuales no dependen de la posición. Para el sistema de coordenadas esféricas, los versores corresponden a las direcciones r, θ y ϕ, los cuales si dependen de la posición.

En coordenadas esféricas, entonces, el campo se expresa como:

$$\mathbf{A}^S = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{2.11}$$

donde cada campo escalar es la proyección del campo expresado en coordenadas cartesianas en la dirección de cada versor.

Dichas proyecciones se calcula como:

$$A_r = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{r}} = A_x\cdot(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) + A_y\cdot(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) + A_z\cdot(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}}), \tag{2.12}$$

$$A_\theta = \mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = A_x\cdot(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) + A_y\cdot(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) + A_z\cdot(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}), \tag{2.13}$$

$$A_\phi = \mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = A_x\cdot(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}) + A_y\cdot(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}) + A_z\cdot(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}). \tag{2.14}$$

Las cuentas pueden verse en el Apéndice A. En la siguiente tabla se resumen los resultados obtenidos.

Componente escalar	Cambio de coordenadas
A_r	$A_x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + A_y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + A_z\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
A_θ	$A_x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + A_y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - A_z\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
A_ϕ	$-A_x\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + A_y\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2.1.4. Discretización del cálculo de la potencia radiada

Para poder calcular la integral correspondiente a la ecuación (2.9) se debe discretizar la integral para poder calcularla de forma numérica.

En primer lugar, se aproxima por una suma finita la integral correspondiente a θ de la siguiente forma:

$$\int_0^\pi U(\theta,\phi)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{i=1}^{N} U(\theta_i,\phi)\sin(\theta_i)\Delta\theta_i. \tag{2.15}$$

Tomando N divisiones uniformes en el intervalo $(0,\pi]$, i.e, $\Delta\theta_i = \frac{\pi}{N}$, se tiene

$$\theta_i = i(\frac{\pi}{N}), \quad i = 1, ..., N$$

Luego, se aproxima la integral correspondiente a ϕ por una suma finita:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{N} U(\theta_i, \phi) \sin(\theta_i) \Delta\theta_i d\phi = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} U(\theta_i, \phi_j) \sin(\theta_i) \Delta\theta_i \Delta\phi_j \tag{2.16}$$

donde en este caso se toman M divisiones del intervalo $(0, 2\pi]$, i.e, $\Delta\phi_j = \frac{2\pi}{M}$, se tiene

$$\phi_j = j(\frac{2\pi}{M}), \quad j = 1, ..., M$$

Finalmente, la energía radiada puede calcularse como:

$$\mathcal{E}_t = \left(\frac{2\pi}{M}\right)\left(\frac{\pi}{N}\right) \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} U(\theta_i, \phi_j) \sin(\theta_i). \tag{2.17}$$

Error de la discretización

Resulta de interés determinar la dependencia de la discretizacion de la superficie de la esfera en función del radio. Para ello, siendo S la superficie calculada de forma analítica y $\hat{S}$ la simulada en el *gprMax*, se definen el error absoluto y relativo como:

$$Er_{abs} = ||S - \hat{S}||^2, \tag{2.18}$$

$$Er_{rel} = \frac{||S - \hat{S}||^2}{||S||^2}. \tag{2.19}$$

Se determinaron de forma numérica el error absoluto y relativo manteniendo fijo el número de puntos tomados para discretizar la superficie de la esfera. Esto es importante para asegurar que al integrar la energía total radiada por la antena, la discretización no afecte su cálculo.

A continuación se muestran los valores obtenidos, los cuales se tomaron para M y N son 60 y 30 respectivamente.

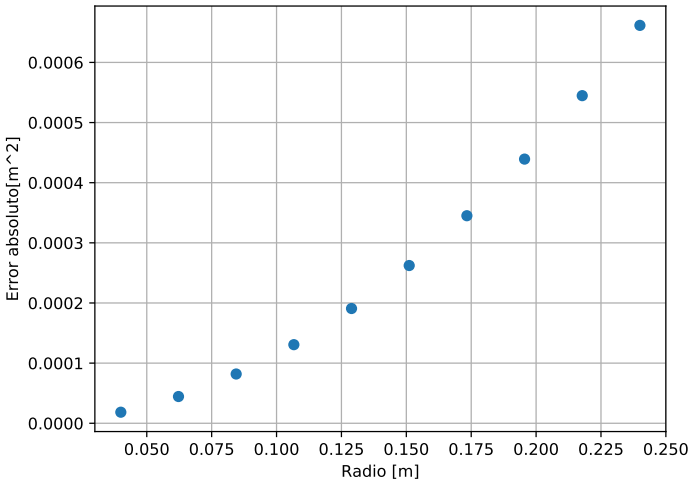


Figura 2.1 – Error absoluto.

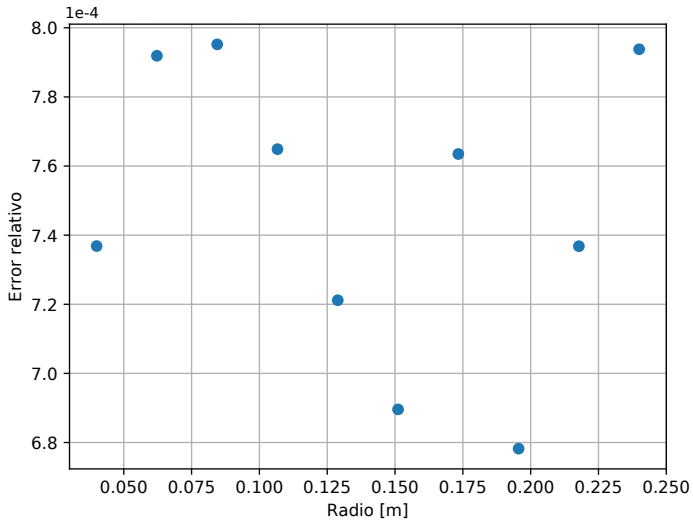


Figura 2.2 – Error relativo.

Se tomó como radio máximo 25 cm debido a que no vamos a querer caracterizar elementos a una distancia superior a 25 cm. Se observa que el error relativo tiene un valor despreciable y además se mantiene en el mismo orden de magnitud a medida que se aumenta el radio. Es por esta razón que no se utilizó una discretización adaptada al radio.

2.2. Simulación dipolo

El *gprMax* viene con una funcionalidad que permite graficar el diagrama de radiación normalizado a 0 dB [28].

Es por esto que se decidió desarrollar un *script* que, a partir de los valores de los campos eléctrico y magnético, además pueda calcularse la ganancia de la antena. Debido a que no suele ser sencillo tener un valor teórico de dicha ganancia, para poder desarrollar el *script* y validar que el cálculo de la ganancia sea correcto, se simuló en primer lugar el caso de un dipolo infinitesimal como antena. El escenario se configuró de la siguiente forma:

- El tamaño del dominio se configuró en 520 mm$\times$520 mm$\times$520 mm. Se podría utilizar un dominio mas chico, pero para poder hacer un buen barrido de distancia de los receptores respecto del dipolo se trató de usar un dominio lo más grande posible.
- El tamaño de la unidad mínima, es decir, de la celda de Yee, se configuró en 2 mm$\times$2 mm$\times$2 mm. Nuevamente, se podría utilizar un mayor tamaño.
- El número de muestras temporales tomadas fueron 4000, valor que fija la ventana temporal. Este parámetro no afecta a la simulación.
- Se pusieron receptores entre 40 mm y 240 mm, con un paso de 20 mm.
- El dipolo está ubicado verticalmente en el eje Z, i.e, la corriente circula en dirección Z. La señal de excitación es de 2 GHz.

En la Fig. 2.3 se muestran los diagramas de radiación obtenidos en elevación (plano XZ) para distintos radios, siendo cada radio la distancia de la antena a los puntos de observación. A priori, se observa en dicha figura que el diagrama de radiación no depende del radio, resultado que coincide con la ecuación (2.20). Para verificar esto se calculó la energía total radiada para cada radio. Esto se puede observar en la Fig. (2.4).

$$D(\theta, \phi) = 1{,}5 \cdot \sin^2(\theta), \tag{2.20}$$

donde θ es el ángulo en elevación y ϕ es el de azimuth.

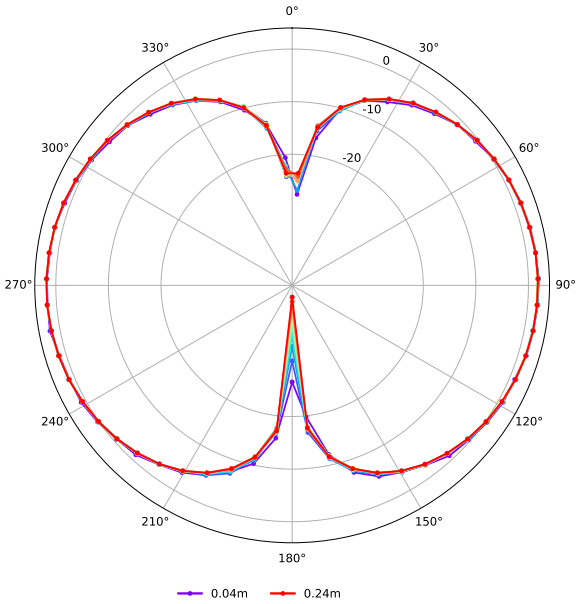


Figura 2.3 – Diagrama de radiación obtenido en el plano XZ para distintos radios.

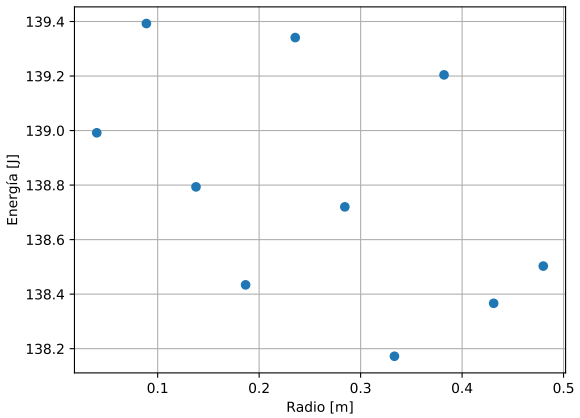


Figura 2.4 – Energía total radiada en función del radio.

Luego, se comparó el resultado del diagrama obtenido a partir de la simulación con el dado por la ecuación (2.20). Esto se puede observar en la siguiente figura:

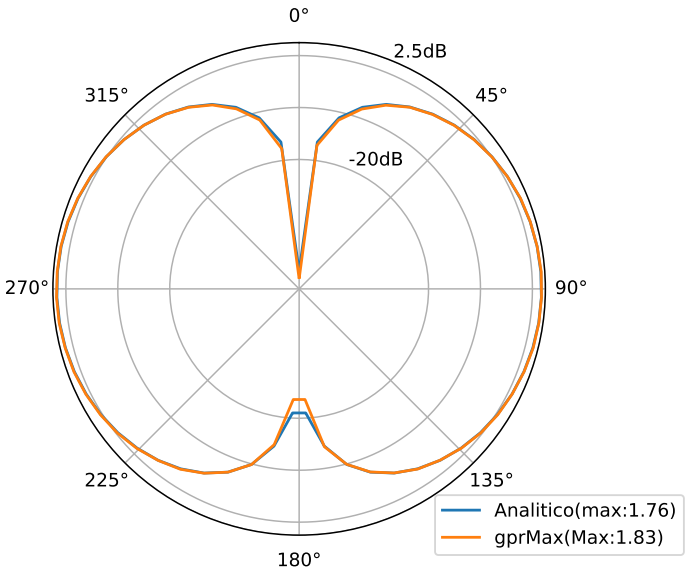


Figura 2.5 – Diagrama de radiación simulado y analítico para el dipolo.

El resultado obtenido con el *gprMax* es prácticamente idéntico al teórico.

2.3. Simulación antena

Una vez que se verificó que el *script* desarrollado para calcular la directividad de una antena es correcto, se pasó al cálculo de la directividad de la antena diseñada por el grupo de investigación.

2.3.1. Estado actual del hardware desarrollado

Se desarrollaron dos prototipos: el prototipo 1 consiste de un transmisor y un receptor con una frecuencia central de 4.25 GHz y un ancho de banda de 500 MHz; la otra plataforma experimental, el prototipo 2, tiene una arquitectura similar a la del prototipo 1, aunque su frecuencia central es de 1.9 GHz y su ancho de banda es 1GHz. En esta tesis se trabajó con el prototipo 2. Ambos prototipos tienen distintas características que resultan atractivas en función de la aplicación de interés. Una mayor frecuencia central permite trabajar con menores longitudes de onda, lo cual excita modos de resonancia de objetos más pequeños. Además, el ancho de banda de trabajo es potencialmente más grande. No obstante, la atenuación debido a obstáculos sufrida por esas señales es mayor. Por otro lado, una frecuencia central menor tiene mejor penetración en diversos materiales (menor atenuación) aunque excita otros modos naturales de los blancos iluminados. La banda de frecuencias utilizada dependerá de la aplicación en particular. Por ejemplo, si la aplicación consiste en evaluar objetos enterrados se utilizarán frecuencias centrales relativamente bajas (300 MHz- 2 GHz) debido a la gran atenuación de las señales.

A continuación se describe brevemente el diseño del prototipo 2. En la Fig. 2.6 puede verse un diagrama en bloques simplificado que describe ambos prototipos, donde las principales diferencias son la frecuencia central y el ancho de banda. Los elementos constitutivos de los prototipos son los siguientes:

- **Descripción del transmisor:** los pulsos a transmitir son generados por medio de una FPGA Virtex de Xilinx, que es capaz de generar pulsos ultracortos y con una impedancia de salida adecuada para esta aplicación. Posteriormente, se utiliza un modulador con un PLL y VCO integrado para trasladar la señal a banda pasante y amplificarla. La señal luego es emitida por medio de una antena de tipo monopolo microstrip de gran ancho de banda cuyo patrón de radiación es aproximadamente isotrópico.
- **Descripción del receptor:** la recepción analógica se realiza mediante una etapa de RF analógica, en la cual la señal es captada por una antena igual a la del receptor, y luego amplificada con un amplificador de bajo ruido (LNA). Posteriormente, se utiliza un filtro pasabanda de gran ancho de banda para eliminar las frecuencias no deseadas por fuera de la banda de paso (BP), y luego un amplificador de gran ganancia para conformar la señal analógica (AMP). Luego, se implementa una conversión a banda base mediante un demodulador I/Q, luego de lo cual se muestrea la señal para ser procesada en una FPGA. Para la plataforma de muestreo, se optó por utilizar un circuito de muestreo en tiempo equivalente que permite obtener tasas equivalentes de muestreo superior a los 5GS/s.

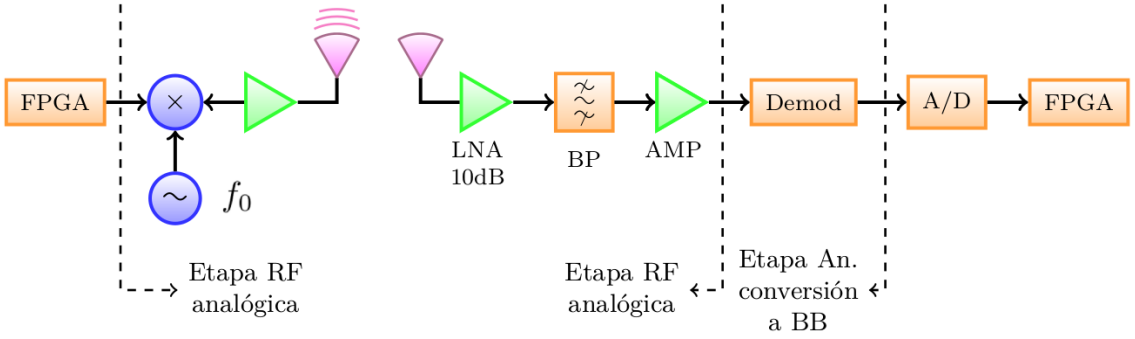


Figura 2.6 – Diagrama en bloques simplificado del prototipo desarrollado. Prototipo 1: $f_0 = 4{,}25$GHz, filtro BP, BW $= 500$MHz. Prototipo 2: $f_0 = 2{,}125$GHz, filtro BP, BW $= 1$GHz.

En este prototipo, se utilizó una placa de evaluación que contiene un conversor A/D de 12 bits, con una tasa de muestreo de hasta 3.6 GS/s y un ancho de banda analógico de 1.75 GHz. Esta placa posee una FPGA Virtex de Xilinx y un software que permite adquirir las muestras y procesarlas en una PC de escritorio.

Las antenas se muestran en la siguiente figura

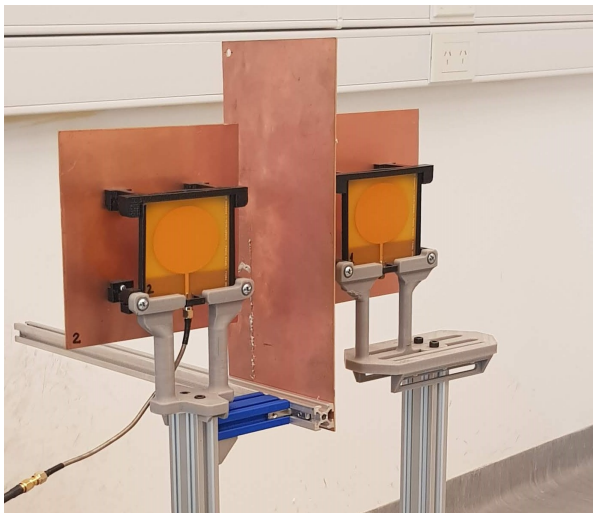


Figura 2.7 – Antena transmisora y receptora construida.

Características principales de la antena Posee un parche elíptico que cumple la función de irradiar la irradiar señales de gran ancho de banda, con una distorsión aceptable y polarización lineal; además, posee una tira microstrip en la parte frontal y un plano de tierra en la parte trasera. La polarización de la antena es lineal. Este diseño, ademas de ser sencillo en cuanto al armado físico, permite transmitir señales UWB pulsos de 1 GHz centrados en 1.9 GHz, tal como fue mencionado

En la Fig. 2.10 se muestra la antena generada por el simulador. El tamaño de la antena es: el semieje en x de la elipse es de 60 mm y en y de 50 mm; el tamaño del pcb es 80 mm$\times$80 mm$\times$2 mm, siendo su permitividad relativa $\epsilon_r = 4{,}4$; la *microstrip* es de 4 mm $\times$20 mm, mientras que el del plano de tierra es 80 mm$\times$20 mm. En la Fig. 2.8 se muestra la antena con sus correspondientes dimensiones. Cabe mencionar que se varió el grosor del PCB y el ancho de la *microstrip* para poder simular con los recursos disponibles y disminuir el tiempo de ejecución del *script* en el software *gprMax*. El cálculo de los tamaños se realizó en el sitio web de *Pasternack*[1] y se determinaron de forma tal de mantener una impedancia de aproximadamente 50 Ω. En la Fig. 2.9 se observa los valores obtenidos.

[1]Se puede encontrar en https://www.pasternack.com/t-calculator-microstrip.aspx

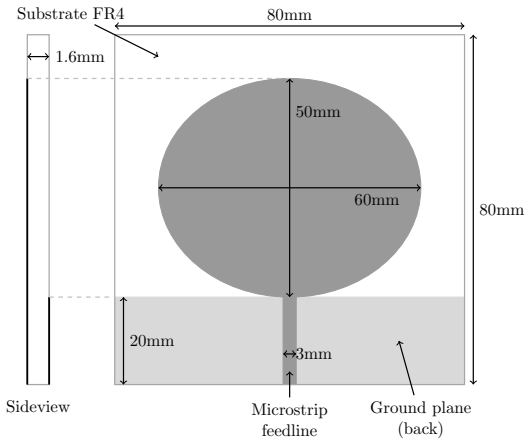


Figura 2.8 – Dimensiones de la antena.

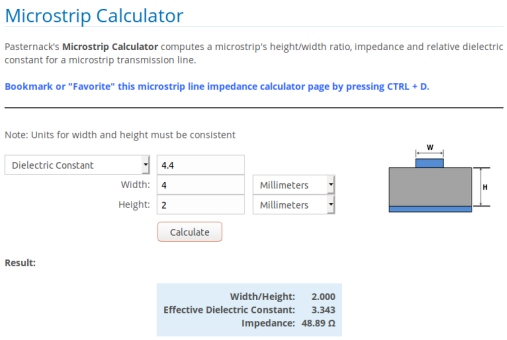


Figura 2.9 – Resultado obtenido con la calculadora de *microstrip* de *Pasternack*.

La antena diseñada en el *gprMax* se observa en la siguiente figura:

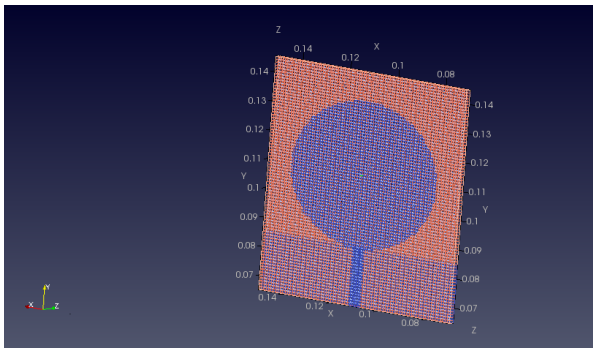


Figura 2.10 – Antena.

La imagen se genera a partir de una funcionalidad que posee *gprMax*, la cual genera un tipo de archivo que se abrió con el software *Paraview*.

2.3.2. Sin reflector

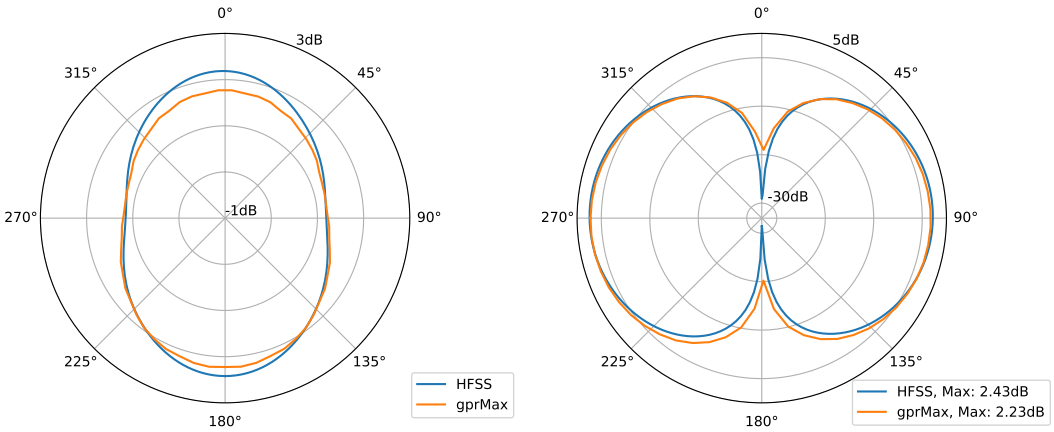
Diseñada la antena, se pasó a simular para poder calcular el diagrama de radiación. Se utilizó el *script* desarrollado para calcular la ganancia de la antena; para validar que el diagrama sea correcto, se comparó contra el calculado con el *software* HFSS.

La configuración de la simulación es la siguiente:

- El tamaño del recinto de simulación es 520 mm×520 mm×520 mm. Esto permite tener mayor cantidad de valores para el radio correspondiente al punto de observación, lo que permite generar mayor cantidad de diagramas de radiación.
- El tamaño de la unidad mínima, es decir, de la celda de Yee, se configuró en 2 mm×1 mm ×2 mm. Se utilizó un mayor tamaño en X y Z ya que lo mínimo necesario es 2 mm.
- El número de muestras temporales tomadas fueron 5000, valor que fija la ventana temporal.
- La señal para alimentar la antena es un excitación armónica, cuya frecuencia se varió entre los valores 1.4 GHz, 1.9 GHz y 2.4 GHz. La polarización se configuró para que sea en dirección Z.
- Para generar el PCB se utilizó el comando *box*, mientras que para el resto se utilizó *plate*, que representa una figura en 2-D.

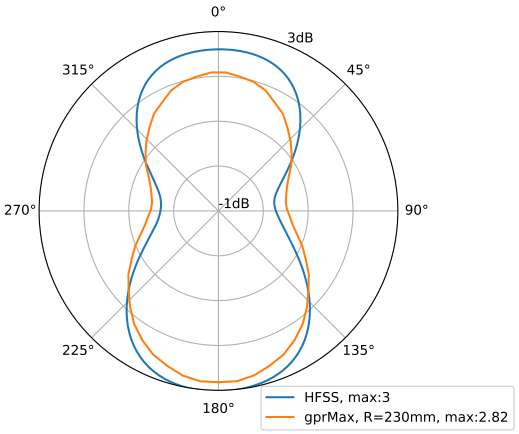
En las siguientes tres figuras se muestran los diagramas de obtenidos para las tres frecuencias mencionadas, comparándolos contra los obtenidos con el HFSS. En cada figura se muestra el diagrama en azimuth y en elevación. El radio de observación es 200 mm. Se observa que los diagramas de elevación coinciden en mayor medida con respecto a los de azimuth.

En cuanto a los diagramas, la máxima ganancia es del lado del plano de tierra. Además, viendo los diagramas en azimuth, la antena se vuelve mas direccional a medida que se aumenta la frecuencia.

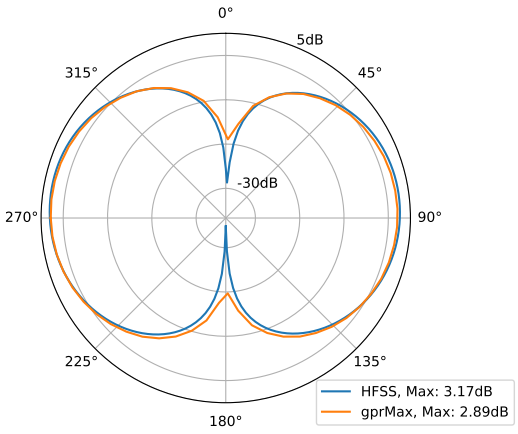


(a) Diagrama en Azimuth **(b)** Diagrama en elevación

Figura 2.11 – Diagrama de radiación para una excitación de 1.4 GHz.

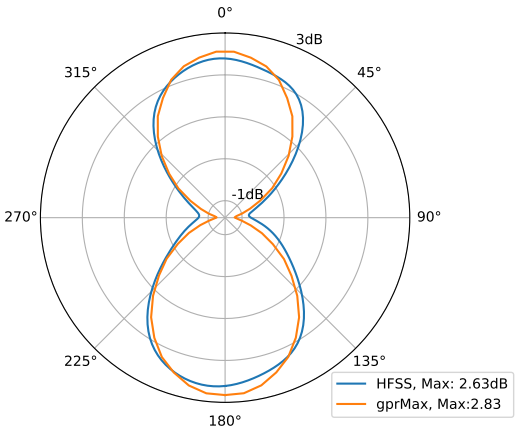


(a) Diagrama en Azimuth

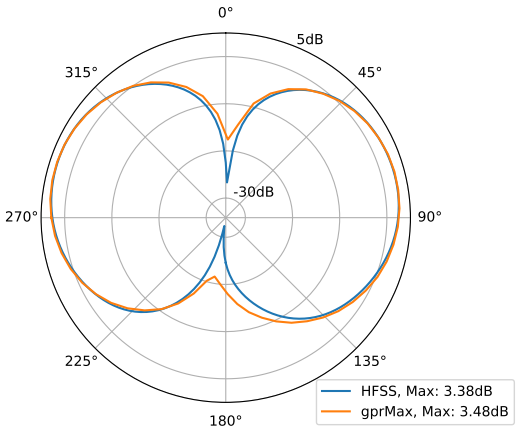


(b) Diagrama en elevación

Figura 2.12 – Diagramas de radiación para una excitación de 1.9 GHz.



(a) Diagrama en Azimuth



(b) Diagrama en elevación

Figura 2.13 – Diagramas de radiación para una excitación de 2.4 GHz.

Teniendo en cuenta que el *gprMax* permite medir el campo electromagnético en cualquier punto del espacio, resulta interesante poder ver el comportamiento del diagrama en la zona de campo cercano. Esto permitiría, por ejemplo, determinar de forma empírica cual es la distancia mínima para considerar que se está en la condición de campo lejano. Se varió entonces el radio entre 80 mm y 240 mm, para poder observar como se va deformando el diagrama a medida que se acerca el punto de observación a la antena.

En la Fig. 2.14 se observan los diagramas de radiación en función del radio. Para determinar a partir de que distancia se está en condición de campo lejano debe tomarse algún criterio. Uno posible es la distancia de Fraunhofer [26]. Para poder utilizar este criterio, se debe cumplir la hipótesis de que la dimensión máxima de la antena (D) tiene que ser mayor a la mínima longitud de onda (λ_{min}); esto no es así para la antena simulada, ya que D es igual a 80 mm, mientras que λ_{min} es igual a 210 mm. Aún asi, si se calcula la distancia, dada

por:

$$r = \frac{2D^2}{\lambda} \tag{2.21}$$

se obtiene que $r = 60\,\text{mm}$. Sin embargo, en la Figura 2.14 se observa que el diagrama de radiación para una distancia igual a 80 mm y 240 mm son totalmente distintos. Por lo tanto, este criterio no es válido, ya que para que se esté en campo lejano el diagrama de radiación no debe variar con la distancia (ver sección 2.1.2).

Por lo tanto, el criterio que se utilizará es determinar de forma gráfica la distancia a partir de la cual el diagrama de radiación no se modifica. Para este caso, se podrían descartar los primeros siete diagramas, considerando la distancia a partir de la cual se está en la condición de campo lejano igual a 200 mm.

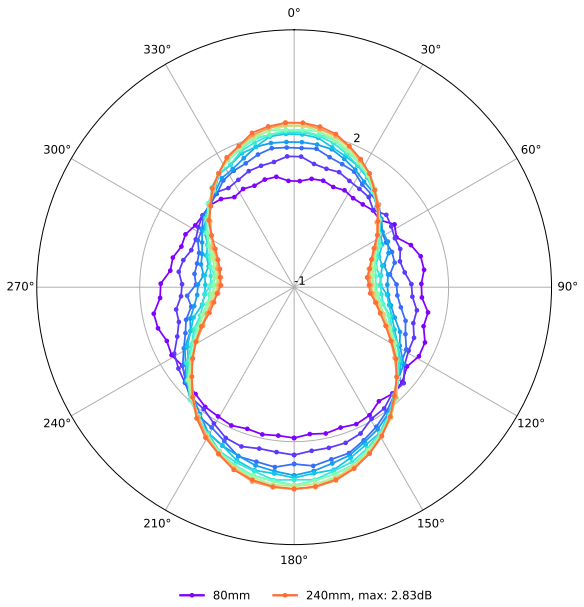


Figura 2.14 – Diagramas de radiación para distintos radios, con un paso de 20 mm, a una frecuencia de 1.9 GHz.

Por otra parte, resulta interesante analizar cual es la energía total irradiada por la antena en las distintas condiciones. En las Figuras 2.15 y 2.16 se muestran los valores obtenidos. Resulta claro que la energía irradiada, por mas que se esté en campo cercano, no varía.

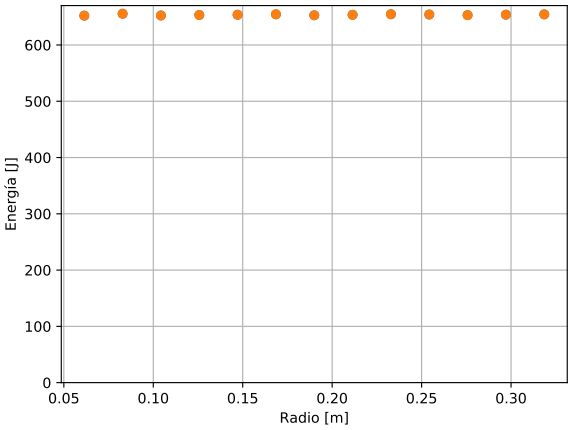


Figura 2.15 – Energía total.

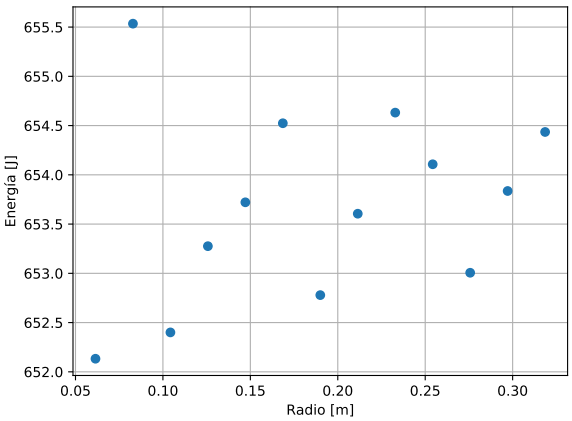


Figura 2.16 – Zoom del gráfico de la energía total.

2.3.3. Con reflector

Para aumentar la direccionalidad de la antena y la ganancia, resulta conveniente colocar un plano reflector. Dicho plano se ubica del lado del plano de tierra, como se ve en la Fig. 2.17. El plano es un cuadrado de lado L=160 mm, lo que equivale aproximadamente a una longitud de onda a 1.9 GHz. La distancia entre el plano y la placa se fijó en d=40 mm.

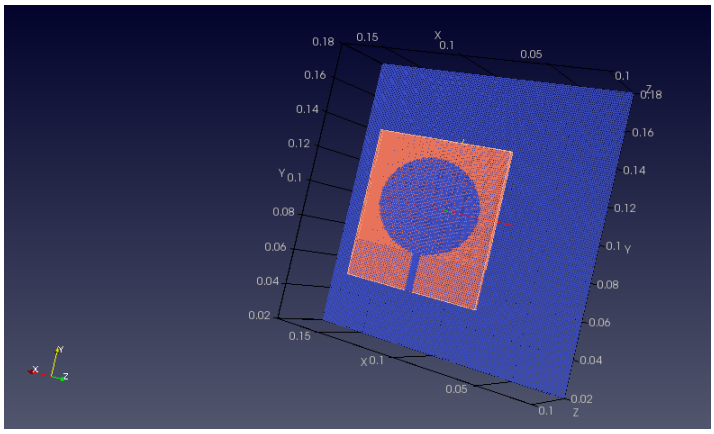
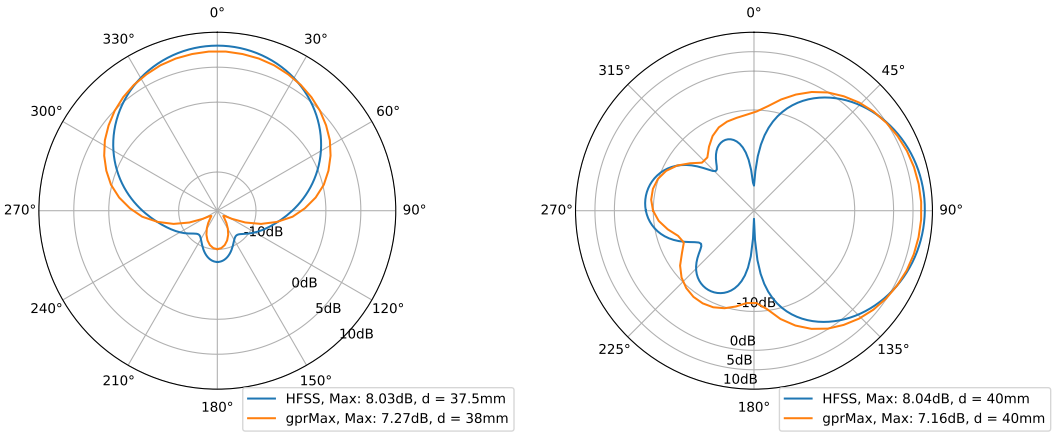


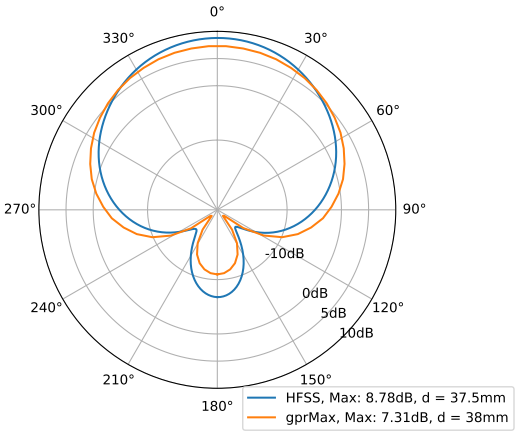
Figura 2.17 – Antena con reflector.

Las condiciones de las simulaciones realizadas para este caso son idénticas a las usadas para el caso de la antena sin reflector. Se calcularon los diagramas de radiación para distintas señales armónicas, siendo las frecuencias de ellas 1.4 GHz, 1.9 GHz y 2.4 GHz; los diagramas se muestran en las siguientes figuras. Se observa que, no solo la directividad cambió (ahora la dirección de máxima ganancia es del lado del parche elíptico), sino también la ganancia. Además, se observa menos dependencia en la directividad con respecto a la frecuencia.

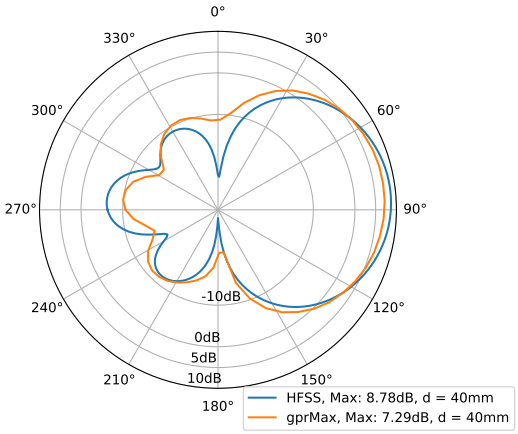


(a) Diagrama en Azimuth **(b)** Diagrama en elevación

Figura 2.18 – Diagramas de radiación para una excitación de 1.4 GHz.

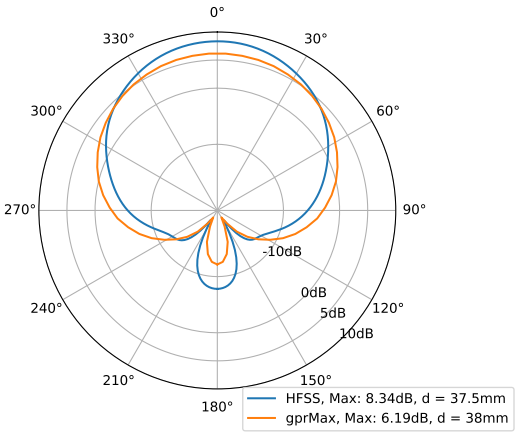


(a) Diagrama en Azimuth

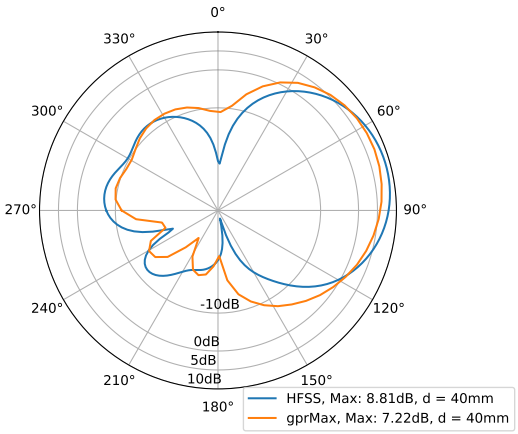


(b) Diagrama en elevación

Figura 2.19 – Diagramas de radiación para una excitación de 1.9 GHz.



(a) Diagrama en Azimuth



(b) Diagrama en elevación

Figura 2.20 – Diagramas de radiación para una excitación de 2.4 GHz.

Luego, se realizó una simulación variando la distancia de los receptores a la antena. Los distintos diagramas se muestran en la Fig. 2.21. En este caso se observa que el diagrama de radiación, en la zona de frente al parche elíptico, no se deforma, sino que lo único que sucede es que se hace menos direccional, disminuyendo la ganancia.

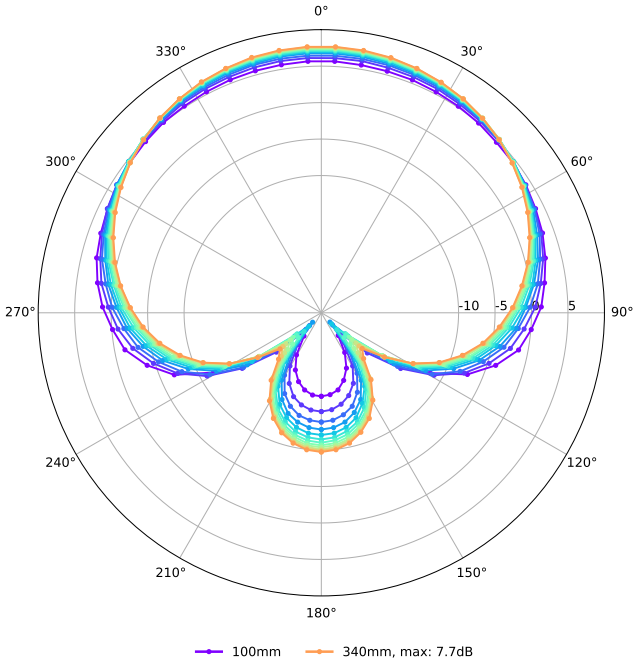


Figura 2.21 – Diagramas de radiación para distintos radios a una frecuencia de 1.9 GHz.

Diagramas de radiación para un pulso gaussiano

La señal que se utilizará en la plataforma física se puede aproximar por un pulso gaussiano modulado en 1.9 GHz, cuyo ancho de banda, tomando como valor mínimo -10 dB, es entre 1.4 GHz y 2.4 GHz; dicha señal, junto con su espectro, se observa en la Fig. 2.22.

Se simuló el diagrama de radiación utilizando dicho pulso como señal de excitación, obteniendo el diagrama de la Fig. 2.23.

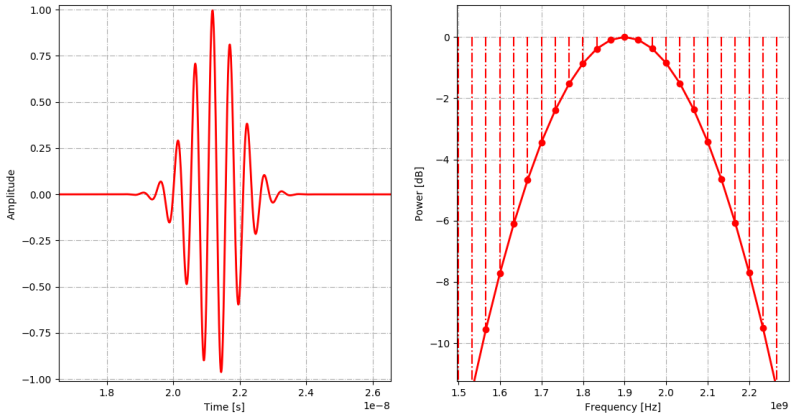


Figura 2.22 – Pulso generado de frecuencia central 1.9 GHz y ancho temporal de aproximadamente 3 ns.

En este caso, al utilizar un pulso que excita varias frecuencias a la vez, se debe calcular el

diagrama de radiación en el dominio temporal, es decir, utilizar la señal en todo el soporte temporal.

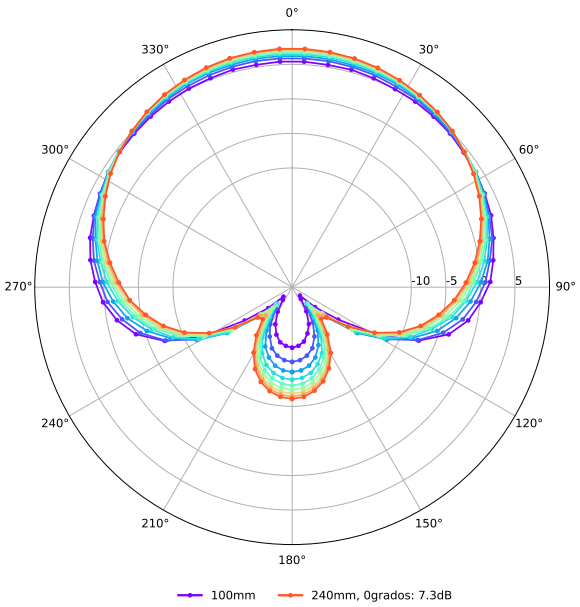


Figura 2.23 – Diagrama de radiación.

2.4. Análisis del plano separador de las antenas Tx-Rx

Una vez diseñado, se analizó el comportamiento del esquema transmitor-receptor usando dos antenas. Al hacer esto, se observó que la señal que se transmite por el camino directo afecta a la medición; para reducir la propagación de dicha señal, se propuso analizar el comportamiento de la energía de la señal recibida por el camino director cuando se introduce un plano separador conductor entre ambas antenas. Para ello, se realizaron distintas simulaciones, variando el tamaño de dicho plano.

El escenario de simulación corresponde a las dos antenas, con plano reflector y separadas 8 mm, siendo la separación la distancia entre ambos planos reflectores. El plano separador se lo ubicó en el punto medio, i.e, en el punto de 4 mm. El lado del plano separador en la dirección Y es 160 mm. Se puede observar en la Fig. 2.25 y en la Fig. 2.24 el plano junto con una de las antenas.

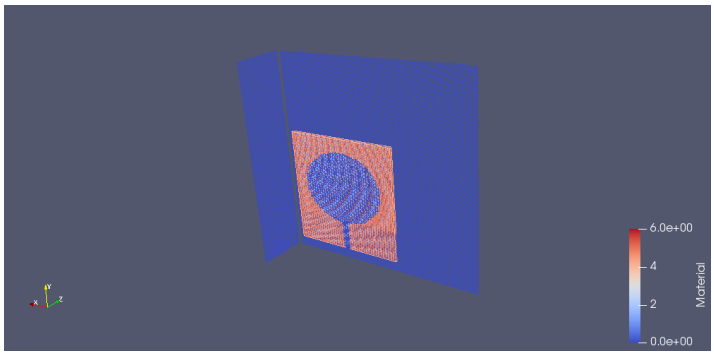


Figura 2.24 – Antena con plano separador.

Para la simulación, se varió el lado en Z para analizar como se comporta la energía de la señal transmitida por el camino directo. En la Fig. 2.26 se observa la energía normalizada al escenario en el cual no hay plano reflector. Se observa un comportamiento extraño entre 70 mm y 100 mm, lo cual puede deberse a algún fenómeno de difracción en los bordes de la placa separadora.

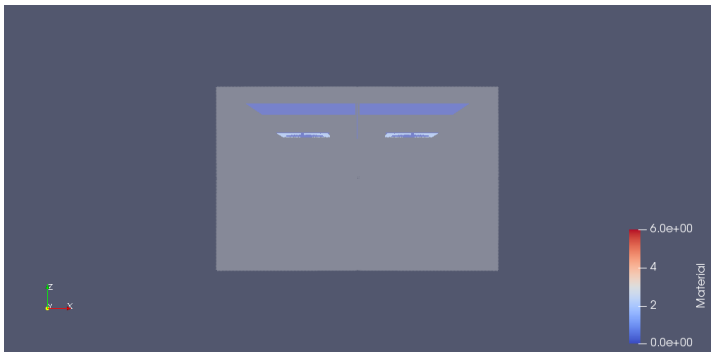


Figura 2.25 – Escenario para el plano Sep.

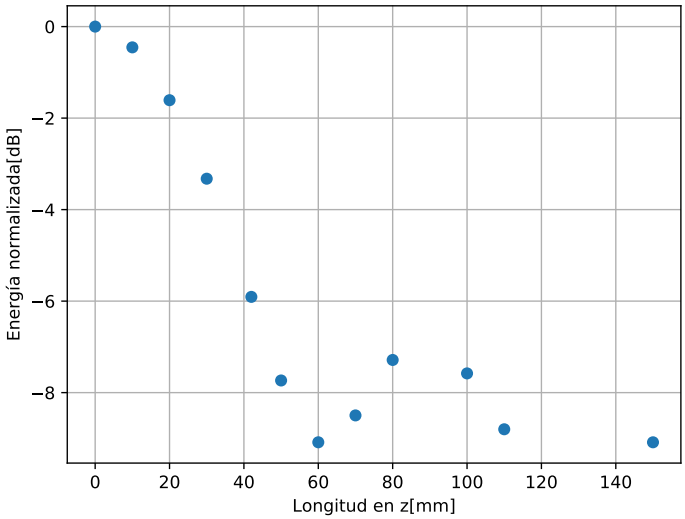


Figura 2.26 – Energía de la señal propagada por el camino directo en función del tamaño del plano sep. en Z.

Además, se graficó el diagrama de radiación de la antena para el caso de $L_z = 38\,\text{mm}$, superponiéndolo con el diagrama correspondiente a la antena sin plano separador (Fig. 2.24). Se observa que es similar al caso sin el plano, disminuyendo la ganancia en el lado que está pegado al plano separador. Sin embargo, no resulta de gran relevancia esa dirección, asique se puede concluir que la inclusión del plano separador mejora el sistema de medición.

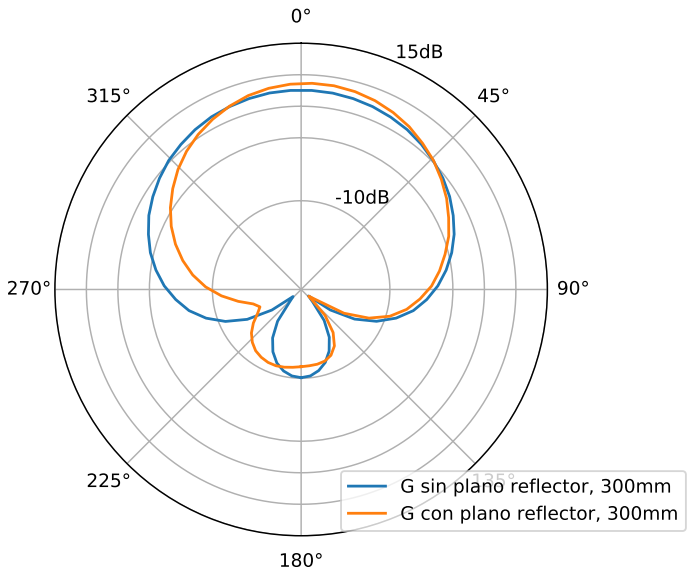


Figura 2.27 – Diagrama de radiación para la antena con plano reflector y plano separador.

2.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se utilizó el software *gprMax* y se validó su comportamiento. Para ello, se fueron analizando escenarios los cuales fueron incrementando en complejidad. Emplear correctamente este software es fundamental para el resto de la tesis, ya que permite generar señales sintéticas de diversos escenarios reales, además de poder usarlas para comparar los modelos teóricos con los resultados obtenidos a través de simulación.

Otro resultado importante obtenido en este capítulo es el de la caracterización de la antena UWB. Se pudo caracterizar a la misma en todo el ancho de banda, obteniendo el diagrama de radiación en distintos escenarios.

Capítulo 3

Modelo de *scattering* electromagnético

Este capítulo se centra en el estudio de un modelo físico para describir el problema de *scattering* electromagnético, en el cual se ilumina un escenario con una onda incidente, y se obtiene una onda de *scattering*, que es la respuesta de los objetos a la interacción con la onda incidente. Luego, dicha señal se procesa para poder extraer información del escenario.

Por lo tanto, a partir de dichas mediciones, el objetivo es poder inferir características, tanto geométricas (forma, ubicación) como electromagnéticas (permitividad del objeto) de los objetos en dicho escenario. Este tipo de problemas se los conoce como problemas inversos [29]. En términos matemáticos, la operación puede ser representada a partir de un operador $L : X \rightarrow Y$, siendo X el espacio del objeto e Y el espacio de las mediciones. El objetivo entonces es encontrar la función correspondiente al mapeo inverso, $\hat{G} = L^a(.)$, $L^a : Y \rightarrow X$, siendo L^a el operador adjunto.

En el marco de esta tesis, se busca obtener una estimación de las características eléctricas del medio iluminado, por ejemplo, para evaluar la existencia o no de un caño enterrado en el suelo o el perfil eléctrico del mismo, a través de mediciones del campo eléctrico de *scattering*. Dicha estimación consistirá en reconstruir un mapa 2-D que estime las propiedades dieléctricas en función de dos coordenadas espaciales (por ejemplo ancho y profundidad). En general, estos problemas son no lineales y se encuentran mal condicionados. Es decir, el número de mediciones que se obtienen son ruidosas y de un espacio acotado del espacio, es decir, no se tiene un mapeo uno a uno entre las mediciones y el objeto a estimar. Esto lleva a que la reconstrucción del escenario tenga múltiples soluciones.

Existen distintos métodos para atacar este problema, los cuales dependen de la información que se busque obtener. Por ejemplo, si únicamente se busca hacer detección y localización de objetos, se puede utilizar algoritmos de imágenes como los algoritmos de migración o los de filtrado inverso. En cambio, si se quieren obtener parámetros físicos, como la permitividad del objeto, se tiene que recurrir a modelos físicos más complejos, como por ejemplo los correspondientes a la teoría de *scattering*.

Dentro de las distintas técnicas existentes para poder detectar objetos, se destacan: *Wave inference migration*, *Diffraction summation*, *F-K migration* y *Kirchhoff migration*. Estas técnicas, en su mayoría, están basadas en la técnica de migración. La migración se refiere al mapeo de una señal obtenida en el plano (x,t), donde x es ancho y t corresponde tiempo, a un plano (x,z), donde z ahora es profundidad [7],[30], [2].

En nuestro caso, se optó por estudiar el problema en base al modelo electromagnético derivado de las ecuaciones de Maxwell y que emplea la función de Green. Dicho modelo

vincula el campo eléctrico de *scattering* con la permitividad dieléctrica del blanco.

Modelo de scattering Uno de los temas de interés dentro de la teoría de *scattering* es determinar propiedades, tanto geométricas como electromagnéticas, de cierto objeto en algún punto del espacio, a partir del campo de *scattering* generado por la interacción entre dicho objeto y un campo incidente generado por una fuente conocida. Una análisis detallado de esta teoría fue desarrollado por Chew en [3] y también por Chen en [31]. Es necesario entonces utilizar un cierto esquema de medición que permita obtener dicho campos de scattering. Resulta necesario definir correctamente el problema, especificando ciertas cantidades o hipótesis:

1. En primer lugar, es importante definir el escenario bajo investigación, tanto geométricamente como sus propiedades electromagnéticas. El aspecto geométrico implica definir si se va a trabajar con un modelo 1-D, 2-D o 3-D, si el medio es homogéneo o inhomogéneo, isotrópico o anisotrópico, si es conveniente modelar el medio como un medio de estratificado debido al perfil dieléctrico. Luego, las propiedades electromagnéticas a definir son la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética, la conductividad y la respuesta en frecuencia del medio. En esta tesis se desarrollará el modelo 2-D. Luego se aplicará dicho modelo a escenarios 2-D y a escenarios 3-D donde exista simetría en una dirección, como sucede para el caso 2-D. Se usará como antena un hilo de corriente infinito y la antena mencionada en el capítulo anterior, respectivamente.

2. En segundo lugar, se debe definir el esquema de medición. Existen distintas alternativas:

   - Iluminar el escenario en distintas posiciones, es decir, colocar antenas transmisoras en diferentes lugares.
   - Colocar, para cada antena transmisora, múltiples receptores ubicados en distintas posiciones.
   - Utilizar transmisores y receptores que trabajen en un cierto ancho de banda para tener variedad de mediciones en frecuencia.

3. Por último, determinar cómo es el objeto que se está investigando. La importancia de esto es poder utilizar alguna aproximación para simplificar el modelo, como por ejemplo, la aproximación de Born/Rytov.

Al llevar este modelo a la práctica se requiere tomar mediciones del campo de *scattering* (cada medición se llama A-scan), las cuales se tomarán con receptores ubicados en la dirección x (ancho); el conjunto de A-scan se conoce como un B-scan del escenario. El sistema utilizado es SISO, por lo que para cada posición de un Transmisor y un Receptor se obtiene un A-scan. Dependiendo del número de mediciones tomadas, el problema se hallará mejor o peor condicionado. A continuación se muestra un esquema del sistema utilizado:

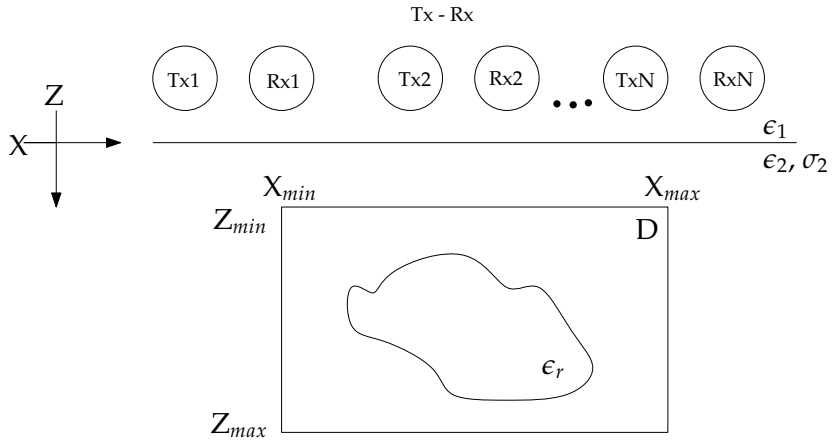


Figura 3.1 – Esquema de medición.

donde el dominio D corresponde al intervalo de posiciones entre las que se ubican las posiciones de Tx y Rx.

La dependencia de la estimación con el número de mediciones hace que sea importante estudiar los límites presentes en este tipo de problemas inversos al querer estimar una imagen. El modelo físico permitirá estudiar estos límites que existen a la hora de la reconstrucción. En particular, límites impuestos por el número de transmisores (Tx) y receptores (Rx).

El capítulo se divide de la siguiente forma: En la primer sección se realiza el desarrollo completo del modelo de *scattering* usando la función de Green para diversos escenarios (escenarios con un único medio, escenarios con dos medios y escenarios con dos medios y un objeto). Se obtiene la expresión funcional del campo eléctrico de *scattering*, y luego se introduce la aproximación de Born, necesaria para linealizar el problema. Desarrollado el modelo, luego se analiza e implementa la función de Green de forma numérica. Para validar que el modelo y su implementación numérica es correcta, se compara el campo eléctrico obtenido de forma teórica con el obtenido con el simulador *gprMax*. Finalmente, se explica cómo obtener una estimación de la imagen a través del operador adjunto.

En la segunda parte del capítulo, se analiza las limitaciones del modelo. En particular, se analiza el muestreo mínimo del B-scan, y la resolución mínima entre objetos para poder detectarlos.

3.0.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \imath\omega\mathbf{B}, \tag{3.1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\imath\omega\mathbf{D} + \mathbf{J}, \tag{3.1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3.1c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{3.1d}$$

donde los campos (fasores) **E**, **H**, **D** y **B** y la carga ρ y la densidad de corriente **J** dependen de la posición **r** (punto de observación o punto campo) y de la frecuencia angular ω. Las ecuaciones anteriores usan la convención de que los campos tienen dependencia temporal $e^{-\imath\omega t}$,

que no es lo usual en ingeniería. Para transformar el fasor a la convención $e^{\imath\omega t}$ simplemente hay que usar el complejo conjugado del campo en cuestión. En el caso del campo eléctrico se debe usar $\mathbf{E}^*$ en lugar de $\mathbf{E}$, ya que $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-\imath\omega t}\right\} = \Re\left\{\left(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-\imath\omega t}\right)^*\right\} = \Re\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r})^* e^{\imath\omega t}\right\}$. Esto hay que tenerlo en cuenta al momento de usar la transformada de Fourier: $X(\omega) = \int x(t)e^{-\imath\omega t}dt$, $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(\omega)e^{\imath\omega t}d\omega$.

Las relaciones entre los campos $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ se conoce como relaciones constitutivas. Dichas relaciones varían de acuerdo al medio.

Medio bianisotrópico Las relaciones constitutivas entre los campos son, de manera general,

$$\mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E} + \bar{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{H},$$
$$\mathbf{B} = \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} + \bar{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E},$$

donde $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\bar{\boldsymbol{\xi}}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ y $\bar{\boldsymbol{\zeta}}$ son tensores de 3×3. El medio descripto por estas cantidades se lo conoce como medio *bianisotrópico*, ya que $\mathbf{D}$ y $\mathbf{B}$ dependen de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$.

Medio anisotrópico En este caso, $\mathbf{D}$ depende sólo de $\mathbf{E}$, y $\mathbf{B}$ sólo de $\mathbf{H}$ según:

$$\mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{E},$$
$$\mathbf{B} = \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}.$$

Medio isotrópico En este caso, las propiedades del medio no dependen de la dirección de los campos. Esto implica por lo que los tensores se convierten en escalares:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \tag{3.2a}$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{3.2b}$$

Nosotros trabajaremos con medios isotrópicos. Tenemos tres clasificaciones más:

- Si ϵ y μ son función de $\mathbf{r}$, el medio es *inhomogéneo* o no homogéneo.
- Si ϵ y μ son función de ω, el medio es *dispersivo*.
- Si ϵ y μ son función de los campos $\mathbf{E}$ o $\mathbf{H}$, el medio es *no lineal*.

3.0.2. Solución para medio isotrópico y homogéneo

En un medio isotrópico y homogéneo ϵ y μ son escalares e independientes de la posición. Reemplazando (3.2) en (3.1), tenemos que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \imath\omega\mu\mathbf{H}, \tag{3.3a}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = -\imath\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}. \tag{3.3b}$$

Tomando el rotor de (3.3a) y usando (3.3b) tenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} = \imath\omega\mu\mathbf{J}. \tag{3.4}$$

Usando la identidad $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{E}$ y la ecuación de continuidad (o conservación de la carga) para el medio considerado $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{\imath\omega\epsilon}$, obtenemos la ecuación de onda vectorial

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = -\imath\omega\mu\left[\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right] \cdot \mathbf{J}, \tag{3.5}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo vectorial eléctrico, $\mathbf{J}$ es la densidad espacial de corriente, $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$ es el número de onda, $\mu = \mu_0$ es la permeabilidad magnética del vacío, $\bar{\mathbf{I}}$ es el tensor identidad respecto del producto escalar notado por $\cdot$, es decir, $\bar{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, ∇^2 es el laplaciano vectorial, es decir, $\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z)$, y $\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ es el gradiente de la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{A}$.

En esta sección consideraremos un escenario relativamente simple en el cual tenemos simetría en una de las direcciones, por ejemplo, en $\hat{y}$. Sea $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \hat{y}J_0\delta(x)\delta(z)$, con J_0 posiblemente dependiente de ω, pero independiente de $\mathbf{r}$, tenemos que $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial y}J_0\delta(x)\delta(z) = 0$, con lo cual $\nabla\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ y (3.5) se convierte en

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = -\hat{y}\imath\omega\mu J_0\delta(x)\delta(z). \tag{3.6}$$

En coordenadas cartesianas, (3.6) se puede expresar en a través de tres ecuaciones escalares:

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0, \tag{3.7a}$$
$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = -\imath\omega\mu J_0\delta(x)\delta(z), \tag{3.7b}$$
$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0. \tag{3.7c}$$

Ninguna fuente excita las componentes E_x y E_z por lo que $E_x = E_z = 0\,\forall\mathbf{r}$. Luego, sólo la componente E_y del campo es no nula. Esta componente es transversal a la dirección de propagación de la onda electromagnética, que se produce en el plano (x, z) y se tiene el modo transversal eléctrico (TE). Además la fuente es sólo función de (x, z) por lo cual E_y sólo depende de estas coordenadas, es decir, $E_y(\mathbf{r}) = E_y(x, z)$. Por otro lado, debido a la simetría de revolución respecto de $(x, z) = (0, 0)$ de esta ecuación, es conveniente usar coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ) con origen en $(0, 0)$, observando que la solución no puede depender del ángulo ϕ por esta misma razón, es decir, $E_y(x, z) = E_y(\rho)$. Luego, (3.7b) se convierte en

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right] E_y(\rho) + k^2 E_y(\rho) = -\imath\omega\mu J_0\delta(\rho), \tag{3.8}$$

La solucion a (3.8) puede hallarse a través de la función de Green (escalar) G, que es la respuesta al impulso del sistema, es decir, la solución a la ecuación

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + k^2\right] g(\mathbf{r}, 0) = -\delta(\rho). \tag{3.9}$$

La ecuación homogenea correspondiente a la ecuacion anterior puede expresarse con un cambio de variable $u = k\rho$ como la ecuación diferencial de Bessel de orden 0. Entre todas las posibles soluciones a dicha ecuación, se elige la solución que representa una onda progresiva con la convención $e^{-\imath\omega t}$, y que satisface la condición de radiación, es decir,

$$g(\mathbf{r}, 0) = \frac{\imath}{4}H_0^{(1)}(k\rho), \tag{3.10}$$

donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primera clase y orden 0. Finalmente, por linealidad de (3.8), la solución E_y es

$$E_y(\rho) = \imath\omega\mu J_0 g(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\omega\mu J_0}{4} H_0^{(1)}(k\rho). \tag{3.11}$$

Empleando la convención fasorial usual $e^{\imath\omega t}$, el campo queda:

$$\tilde{E}_y(\rho, \omega) = \tilde{E}_y(\rho)^* \tag{3.12}$$

$$= -\frac{\omega\mu J_0^*}{4} H_0^{(1)}(k\rho)^* \tag{3.13}$$

$$= -\frac{\omega\mu \tilde{J}_0(\omega)}{4} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right), \tag{3.14}$$

donde hemos hecho explícita la dependencia del campo y la densidad de corriente con la frecuencia, además de definir $\tilde{J}_0(\omega)$ como la transformada de Fourier usual de la densidad corriente temporal, y usar que la función de Hankel de segunda clase satisface $H_0^{(2)} = H_0^{(1)^*}$.

Simulación en gprMax Para validar estos cálculos se simuló este escenario en el gprMax. La simulación se realizó en 2D, para que la dirección en $\hat{y}$ sea invariante. La fuente (transmisor) es un dipolo elemental (esta antena en el *gprMax* corresponde a `hertzian_dipole`), el receptor se ubica a una distancia ρ del transmisor, el medio es homogeneo (aire) y la señal de excitación (`waveform`) es un pulso gaussiano como el que se muestra en la Fig. 3.2.

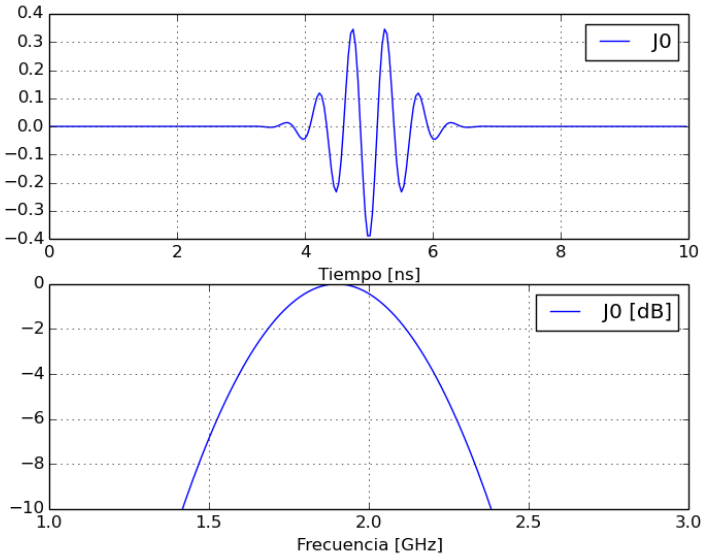


Figura 3.2 – Densidad de corriente en el tiempo y en frecuencia (normalizado a 0 dB).

Luego, en la Fig. 3.3 se muestra el campo E_y simulado y medido para una separación entre el transmisor y el receptor de $\rho = 6$ cm. Ambas curvas se superponen con lo cual se validan los cálculos realizados y las simulaciones hechas.

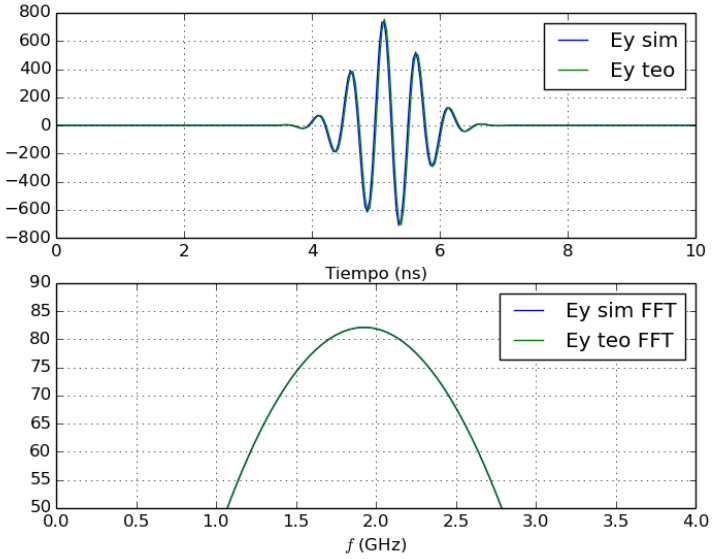


Figura 3.3 – E_y simulado y medido en tiempo y frecuencia.

3.0.3. Solución para medio isotrópico con una interfaz

Al igual que en el escenario anterior, consideraremos un medio isotrópico. Sin embargo, ahora consideraremos un caso particular de un medio heterogéneo, es decir, un medio estratific

$$\epsilon = \epsilon_b(z) = \begin{cases} \epsilon_0 \text{ si } z \geq 0, \\ \epsilon_1 \text{ si } z < 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

donde el subíndice b se refiere a la palabra *background* y quedará claro en la próxima sección (Ver Fig. 3.4).

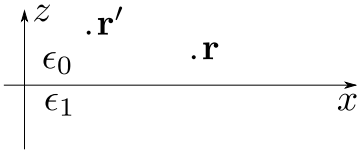


Figura 3.4 – Medio isotrópico con una interfaz en $z = 0$.

El caso en que el medio presenta múltiples capas es una extensión relativamente sencilla de este caso. Además consideraremos que el medio no es magnético, es decir, $\mu = \mu_0$.

Nuevamente, partimos de las ecuaciones de Maxwell: reemplazamos (3.2) en (3.1) y enfatizamos la dependencia de la permitividad con z:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \imath\omega\mu_0\mathbf{H}, \tag{3.16a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\imath\omega\epsilon_b(z)\mathbf{E} + \mathbf{J}. \tag{3.16b}$$

Tomando el rotor de (3.16a) y usando (3.16b) tenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \mu_0 \epsilon_b(z) \mathbf{E} = \imath \omega \mu_0 \mathbf{J}. \tag{3.17}$$

Aquí nuevamente podemos usar la identidad $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$, sin embargo, en la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{J} = \imath \omega \nabla \cdot \epsilon_b(z) \mathbf{E}$ no es posible conmutar ∇ y $\epsilon_b(z)$ debido a la dependencia espacial de ϵ con z[1]. No obstante, como $\epsilon_b(z)$ es constante a tramos (ver (3.15)), $\nabla \cdot \epsilon_b(z)\mathbf{E} = \epsilon_b(z) \nabla \cdot \mathbf{E}\ \forall z \neq 0$. Luego, obtenemos la ecuación de onda vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_b(z)^2 \mathbf{E} = -\imath \omega \mu \left[\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{k_b(z)^2} \right] \cdot \mathbf{J},\ z \neq 0, \tag{3.18}$$

donde $k_b(z)^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_b(z)$.

Asumiendo la misma excitación de la sección anterior, salvo que ahora la línea de corriente se encuentra en $\mathbf{r}' = (x', z')$, la única componente de $\mathbf{E}$ no nula es E_y y debe satisfacer

$$\nabla^2 E_y(x,z) + k_b(z)^2 E_y(x,z) = -\imath \omega \mu_0 J_0 \delta(x - x') \delta(z - z'),\ z \neq 0, \tag{3.19}$$

que es equivalente a

$$\nabla^2 E_y(x,z) + k_0^2 E_y(x,z) = -\imath \omega \mu_0 J_0 \delta(x - x') \delta(z - z'),\ z > 0, \tag{3.20a}$$
$$\nabla^2 E_y(x,z) + k_1^2 E_y(x,z) = -\imath \omega \mu_0 J_0 \delta(x - x') \delta(z - z'),\ z < 0, \tag{3.20b}$$

donde $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ y $k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$.

La ecuación (3.19) se puede resolver de la siguiente manera. Podemos resolver (3.20a) y (3.20b) por separado, y luego aplicar las condiciones de contorno en la frontera $z = 0$. Así hallaremos una solución y sabemos que es *la* solución debido a que se cumple el teorema de unicidad[2]. Tomando un sistema de coordenadas cilíndricas con origen en $\mathbf{r}'$, la función de Green $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ con punto fuente en $\mathbf{r}'$ y punto campo en $\mathbf{r}$ es la función que satisface lo siguiente:

$$(\nabla^2 + k_b(z)^2) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),\ z \neq 0, \tag{3.21}$$

o, equivalentemente,

$$(\nabla^2 + k_0^2) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),\ z > 0, \tag{3.22a}$$
$$(\nabla^2 + k_1^2) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),\ z < 0. \tag{3.22b}$$

Las ecuaciones (3.22a) y (3.22b) son equivalentes a la ecuación (3.7b) obtenida en un medio homogéneo con la misma excitación, por lo tanto la solución es similar. Si el medio fuera homogéneo, la solución es una superposición de ondas planas, ya que la función de Hankel de orden cero y primera clase admite la siguiente descomposición espectral [3, Ec. (2.2.11)]:

$$\frac{\imath}{4} H_0^{(1)}(k_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) = \frac{\imath}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{1}{k_{iz}} e^{\imath k_x (x - x') + \imath k_{iz} |z - z'|},\ i = 0, 1, \tag{3.23}$$

[1] Se podría usar la identidad $\nabla \cdot \epsilon_b(z)\mathbf{E} = \nabla \epsilon_b(z) \cdot \mathbf{E} + \epsilon_b(z) \nabla \cdot \mathbf{E}$ para despejar $\nabla \cdot \mathbf{E}$ y reemplazarlo en la ecuación anterior.

[2] Las condiciones bajo las cuales se cumple que una solución a la ecuación de onda es única son: i) las condiciones de borde, y ii) la condición de radiación. Ver [3, Cap. 1.5].

donde $k_{iz} = \sqrt{k_i^2 - k_x^2}$, y el índice $i = 0$ se corresponde con (3.22a) e $i = 1$ con (3.22b). Luego, para resolver el problema con la interfaz se debe analizar cómo se reflejan o transmiten las ondas planas en $z = 0$. Se deben considerar dos casos: i) la fuente está en el semiplano superior ($z' > 0$); ii) la fuente está en el semiplano inferior ($z' < 0$).

Consideramos primero el caso i), con $z' > 0$, para el cual definimos los coeficientes de reflexión y transmisión como R_+^{TE} y T_+^{TE}, respectivamente. En el semiplano superior, se tiene una onda progresiva[3] (incidente a la interfaz) y una onda regresiva (reflejada en la interfaz), mientras que en el semiplano inferior, sólo tenemos una onda progresiva (transmitida a al medio ϵ_1). Planteando las condiciones de contorno para cada onda plana [3, Cap. 2.1.2] y superponiendo obtenemos[4] (3.24b) y (3.24a).

Para el caso ii), con $z' < 0$, definimos los coeficiente de reflexión y transmisión R_-^{TE} y R_-^{TE} respectivamente. En este caso, en en semiplano superior, se tiene sólo una onda progresiva (transmitida al medio ϵ_0), mientras que en el semiplano inferior, tenemos una onda progresiva (incidente) y una onda regresiva (la reflejada en la interfaz). Planteando las condiciones de contorno obtenemos (3.24c) y (3.24d).

$$g(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{\imath}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x T_+^{\mathrm{TE}}(k_x)\frac{1}{k_{0z}} e^{\imath k_x(x-x') - \imath k_{1z} z + \imath k_{0z} z'}, & \text{z<0, z'>0} \quad (3.24a) \\ \frac{\imath}{4} H_0^{(1)}(k_0\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) + \frac{\imath}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x R_+^{\mathrm{TE}}(k_x)\frac{1}{k_{0z}} e^{\imath k_x(x-x') + \imath k_{0z}(z+z')}, & \text{z>0, z'>0} \quad (3.24b) \\ \frac{\imath}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x T_-^{\mathrm{TE}}(k_x)\frac{1}{k_{1z}} e^{\imath k_x(x-x') + \imath k_{0z} z - \imath k_{1z} z'}, & \text{z>0, z'<0} \quad (3.24c) \\ \frac{\imath}{4} H_0^{(1)}(k_1\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) + \frac{\imath}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x R_-^{\mathrm{TE}}(k_x)\frac{1}{k_{1z}} e^{\imath k_x(x-x') - \imath k_{1z}(z+z')}, & \text{z<0, z'<0} \quad (3.24d) \end{cases}$$

donde

$$R_+^{\mathrm{TE}}(k_x) = \frac{k_{0z} - k_{1z}}{k_{0z} + k_{1z}}, \quad (3.25a)$$

$$T_+^{\mathrm{TE}}(k_x) = 1 + R_+^{\mathrm{TE}}(k_x) = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{1z}}, \quad (3.25b)$$

$$R_-^{\mathrm{TE}}(k_x) = \frac{k_{1z} - k_{0z}}{k_{1z} + k_{0z}} = -R_+^{\mathrm{TE}}(k_x), \quad (3.25c)$$

$$T_-^{\mathrm{TE}}(k_x) = 1 + R_-^{\mathrm{TE}}(k_x) = \frac{2k_{1z}}{k_{1z} + k_{0z}}. \quad (3.25d)$$

En medios isotrópicos (y anisotrópicos también) e inhomogéneos se cumple, por el teorema de reciprocidad [3, Cap. 1.3.2], que $g(\mathbf{r},\mathbf{r}') = g(\mathbf{r}',\mathbf{r})$. Esto se verifica en (3.24).

3.0.4. Solución para medio isotrópico con una interfaz y un blanco

Consideremos el escenario de la Fig. 3.5, en el cual el problema es modelar el campo que se mide en $\mathbf{r}$ debido a la presencia de un blanco en el semiplano inferior $z < 0$ con una extensión dada por la superficie T (de *target*) desconocida, cuando la excitación es una línea de corriente $J(\mathbf{r}) = \hat{y} J_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, donde $\mathbf{r} = (x, z)$ y $\mathbf{r}' = (x', z')$, $z, z' > 0$.

[3] Una onda progresiva se propaga *desde* la fuente, mientras que una onda regresiva se propaga *hacia* la fuente.

[4] $x - x'$ puede ser reemplazado por $|x - x'|$ sin alterar el resultado de las integrales. Se lo demuestra haciendo un cambio de variables $u = -k_x$.

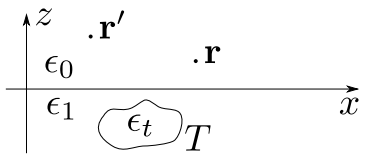


Figura 3.5 – Medio isotrópico con una interfaz y un blanco de extensión T.

Asumiremos que $\mu = \mu_0 \forall \mathbf{r}$ y que la permitividad es:

$$\epsilon = \epsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \epsilon_0 & \text{si } z \geq 0, \\ \epsilon_1 & \text{si } z < 0 \cap \mathbf{r} \notin T, \\ \epsilon_t(\mathbf{r}) & \text{si } z < 0 \cap \mathbf{r} \in T. \end{cases} \tag{3.26}$$

Definimos el número de onda como $k(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon(\mathbf{r})$. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell (3.1), y usando las relaciones constitutivas para un medio isotrópico (3.2) obtenemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k(\mathbf{r})^2 \mathbf{E} + \imath\omega\mu_0 \mathbf{J}. \tag{3.27}$$

Despejando $\nabla \cdot \mathbf{E}$ de la identidad $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E} = \nabla\epsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} + \epsilon(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{E}$, y usando la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{\imath\omega}$ tenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{\imath\omega\epsilon(\mathbf{r})} - \frac{\nabla\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E}. \tag{3.28}$$

Ahora, reemplazando (3.28) en la identidad $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{E}$, (3.27) queda:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k(\mathbf{r})\mathbf{E} + \nabla\left(\frac{\nabla\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E}\right) = \nabla\left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{\imath\omega\epsilon(\mathbf{r})}\right) - \imath\omega\mu_0\mathbf{J}. \tag{3.29}$$

Debido a las características de la fuente, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Por otro lado, $\nabla\epsilon(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial\epsilon(\mathbf{r})}{\partial x}, 0, \frac{\partial\epsilon(\mathbf{r})}{\partial z}\right)$ ya que $\epsilon(\mathbf{r})$ no es función de y. Luego, $\frac{\nabla\epsilon(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}}{\epsilon(\mathbf{r})} = \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial\epsilon(\mathbf{r})}{\partial x}E_x + \frac{\partial\epsilon(\mathbf{r})}{\partial z}E_z\right)$, con lo cual las componentes en x y z de (3.29) quedan:

$$\nabla^2 E_x + k(\mathbf{r})E_x + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial\epsilon(\mathbf{r})}{\partial x}E_x + \frac{\partial\epsilon(\mathbf{r})}{\partial z}E_z\right)\right] = 0, \tag{3.30a}$$

$$\nabla^2 E_z + k(\mathbf{r})E_z + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial\epsilon(\mathbf{r})}{\partial x}E_x + \frac{\partial\epsilon(\mathbf{r})}{\partial z}E_z\right)\right] = 0. \tag{3.30b}$$

A diferencia de los casos anteriores (medio homogéneo o estratificado), las ecuaciones anteriores estan acopladas. Sin embargo, ninguna de las dos ecuaciones tiene fuentes, por lo que $E_x = E_z = 0$. Esto hace que $\frac{\nabla\epsilon(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}}{\epsilon(\mathbf{r})} = 0$. Luego, (3.29) se convierte en la ecuación de Helmholz, siendo la componente E_y la única no nula:

$$\nabla^2 E_y + k(\mathbf{r})E_y = -\imath\omega\mu_0 J_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{3.31}$$

A continuación, trabajaremos con la función de Green $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de la sección anterior definida por la ecuación (3.21). Luego, (3.31) se puede escribir como

$$\left(\nabla^2 + k_b(\mathbf{r})\right) E_y(\mathbf{r}) = -\imath\omega\mu_0 J_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \left(k(\mathbf{r})^2 - k_b(\mathbf{r})^2\right) E_y(\mathbf{r}), \tag{3.32}$$

donde $k_b(\mathbf{r}) = k_b(z)$. El segundo miembro de (3.32) puede ser interpretado como una fuente $s(\mathbf{r}) = \imath\omega\mu_0 J_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \left(k(\mathbf{r})^2 - k_b(\mathbf{r})^2\right) E_y(\mathbf{r})$. Luego, por linealidad de la ecuación anterior, y expresando a la fuente como superposición de impulsos, tenemos:

$$\begin{aligned} E_y(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^2} s(\mathbf{r}'') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' && (3.33)\\ &= \imath\omega\mu_0 J_0 \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' + \int_{\mathbb{R}^2} \left(k(\mathbf{r}'')^2 - k_b(\mathbf{r}'')^2\right) E_y(\mathbf{r}'') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' && (3.34)\\ &= \imath\omega\mu_0 J_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int_{\{\mathbb{R}^2 : z<0\}} O(\mathbf{r}'') E_y(\mathbf{r}'') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') d\mathbf{r}'', && (3.35) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} O(\mathbf{r}) &= k(\mathbf{r})^2 - k_b(\mathbf{r})^2 && (3.36)\\ &= \left(k(\mathbf{r})^2 - k_b(\mathbf{r})^2\right) \mathbb{1}(\mathbf{r} \in T) && (3.37)\\ &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \Delta\epsilon(\mathbf{r}) && (3.38)\\ &= k_0^2 \Delta\epsilon_r(\mathbf{r}) && (3.39) \end{aligned}$$

es conocida como función objeto, y

$$\Delta\epsilon_r(\mathbf{r}) = (\epsilon_{r_t}(\mathbf{r}) - \epsilon_{r_1}) \mathbb{1}(\mathbf{r} \in T) \tag{3.40}$$

es la función contraste, siendo $\epsilon_{r_t}(\mathbf{r})$ y ϵ_{r_1} las permitividades relativas del blanco y del medio ϵ_1, respectivamente, y $k_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}$ el número de onda en el vacío.

Por otro lado, notar que el primer término de (3.35) es el campo que se produce en el caso que no haya blanco e incluye la reflexión en la interfaz, y típicamente se lo llama campo incidente:

$$E_{y_{\text{inc}}}(\mathbf{r}) = \imath\omega\mu_0 J_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{3.41}$$

En el caso de la Fig. 3.5, $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \{z : z > 0\}$, con lo que la función de Green correspondiente es (3.24b).

Luego, el campo de *scattering* se define como el campo total menos el incidente: $E_{y_s}(\mathbf{r}) = E_y(\mathbf{r}) - E_{y_{\text{inc}}}(\mathbf{r})$. De (3.35) tenemos:

$$\begin{aligned} E_{y_s}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^2} O(\mathbf{r}'') E_y(\mathbf{r}'') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' && (3.42)\\ &= k_0^2 \int_{\{\mathbb{R}^2 : z<0\}} \Delta\epsilon_r(\mathbf{r}'') E_y(\mathbf{r}'') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') d\mathbf{r}''. && (3.43) \end{aligned}$$

3.0.5. Aproximación de Born

La expresión (3.43) es exacta aunque es dificil resolver porque el campo total es desconocido en el dominio de integración, en nuestro caso el semiplano negativo. Una manera

de simplificar el problema es asumir *weak scattering* y aproximar el campo total por el incidente, asumiendo como hipótesis que el campo de *scattering* generado por el objeto es débil, ya sea por ser la función contraste pequeña o porque el tamaño del objeto es pequeño respecto de la longitud de onda del campo transmitido; en términos matemáticos, implica que $E_y(\mathbf{r}) \approx E_{y_{\text{inc}}}(\mathbf{r})$. Entonces, reemplazando en la ecuación (3.35), se obtiene que:

$$E_y(\mathbf{r}) = E_{y_{(inc)}}(\mathbf{r}) + \int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} O(\mathbf{r}'')E_y(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r},\mathbf{r}'')d\mathbf{r}'' \tag{3.44}$$

$$= E_{y_{inc}}(\mathbf{r}) + \int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} O(\mathbf{r}'')E_{y_{(inc)}}(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r},\mathbf{r}'')d\mathbf{r}''. \tag{3.45}$$

Al aproximar el campo eléctrico total de esta forma, se tiene una expresión que elimina la no linealidad generada por el producto del campo eléctrico total y la función contraste (ambas incógnitas).

Luego, la aproximación de Born consiste en expresar el campo eléctrico de *scattering* como:

$$E_{y_s}(\mathbf{r}) = \int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} O(\mathbf{r}'')E_{y_{inc}}(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r},\mathbf{r}'')d\mathbf{r}''. \tag{3.46}$$

Se pedirá que el el campo de *scattering*, definido por el segundo término de la ecuación (3.45) sea mucho menor a 1.

Finalmente, reemplazando el campo incidente por (3.41) se obtiene:

$$E_{y_s}(\mathbf{r}) \approx \imath J_0 k_0^3 \eta_0 \int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} \Delta\epsilon_r(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')g(\mathbf{r},\mathbf{r}'')d\mathbf{r}'', \tag{3.47}$$

donde $\omega\mu_0 = k_0\eta_0$, siendo $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ es la impedancia intrínseca en el vacío y $\mathbf{r}'$ es la posición del transmisor. Esta ecuación coincide exactamente con [4, ec. (4)], donde se asume que $J_0 = 1$.

Esta aproximación supone como hipótesis que el objeto tiene ciertas características geométricas [11],[1], [32]. Esto implica que si el objeto es circular con un radio $r = r_0$, el mismo debe cumplir:

$$r < \frac{\pi}{\max\{|k_r(r) - k_b|\}}, \tag{3.48}$$

donde k_r es el número de onda del blanco y k_b del *background*. Para demostrar hasta cuándo es válida la aproximación para poder reconstruir un objeto completamente se realizaron simulaciones que se presentan luego.

3.0.6. Reconstrucción de la imagen

Finalmente, una vez calculada la función de Green, y bajo la aproximación de Born, resta reconstruir la imagen. Para ello, se define el operador:

$$\mathbb{L}(.) = \imath J_0(k) k_0^3 \eta_0 \int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} g(\mathbf{r}'',\mathbf{r}',k)g(\mathbf{r},\mathbf{r}'',k)(.)d\mathbf{r}'', \tag{3.49}$$

donde $\mathbf{r}'$ es la ubicación del transmisor, $\mathbf{r}$ la del receptor, $E_{y_s}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, k) = \mathbb{L}(\Delta\epsilon_r(\mathbf{r}''))$ y se hizo explicita la dependencia de la función de Green y la densidad de corriente con la frecuencia ω, a través del número de onda $k = \omega\sqrt{\epsilon_b}$. Luego, para obtener la imagen se deberá aplicar el operador adjunto al campo eléctrico de *scattering* medido, el cual se define como ([33],[34]):

$$\mathbb{L}^H(.) = \imath k_0^3 \eta_0 \int_{k_{min}}^{k_{max}} \int_{\mathbf{r}_{r_{min}}}^{\mathbf{r}_{r_{max}}} \int_{\mathbf{r}_{t_{min}}}^{\mathbf{r}_{t_{max}}} \left[g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', k) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', k) J_0(k) \right]^H (.) d\mathbf{r}' \, d\mathbf{r} \, dk, \tag{3.50}$$

donde H es el operador hermítico. En nuestro caso, las integrales respecto a las posiciones de los Tx y Rx se reducen a integrar sobre una única dirección, x (ancho), ya que la posición z está fija. Además, la función de Green en este tipo de escenarios 2-D son funciones escalares, por lo que unicamente debe conjugarse ($\mathbb{L}^H(.) = \mathbb{L}^*(.)$). Entonces:

$$\mathbb{L}^*(.) = \imath k_0^3 \eta_0 \int_{k_{min}}^{k_{max}} \int_{x_{r_{min}}}^{x_{r_{max}}} \int_{x_{t_{min}}}^{x_{t_{max}}} \left[g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', k) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', k) J_0(k) \right]^* (.) dx' \, dx \, dk. \tag{3.51}$$

Finalmente, la imagen será aplicar el operador adjunto al campo eléctrico de *scattering*.

$$I(\mathbf{r}'') = \mathbb{L}^*(E_{y_s}(x', x, k)), \tag{3.52}$$

donde $\mathbf{r}''$ corresponde a un punto en el semiplano negativo, i.e, el escenario que se está iluminando. En la imagen, cada $\mathbf{r}''$ va a corresponder a un pixel.

Definida la forma en que se va a reconstruir la imagen, es necesario entonces obtener las mediciones del campo de *scattering* para cada ubicación del receptor. Para ello, se iluminará el escenario de investigación para distintas ubicaciones del conjunto Tx-Rx; cada una esas mediciones se conocen como A-scan (Fig. 3.6). Teniendo en cuenta que el sistema es SISO, tanto el Tx como el Rx se moverán en conjunto.

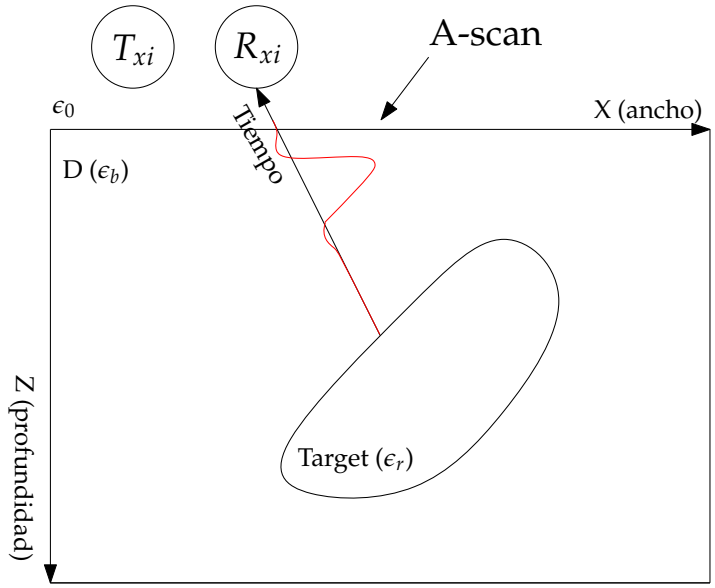


Figura 3.6 – Medición - A-scan.

Finalmente, luego de iluminar en distintos puntos, se obtiene una imagen llamada B-scan, que corresponde a la superposición de los distintos A-scan. En la siguiente figura se muestra una representación de la imagen correspondiente a un B-scan para un blanco puntual, donde la superposición de los A-scan da lugar a una hipérbola.

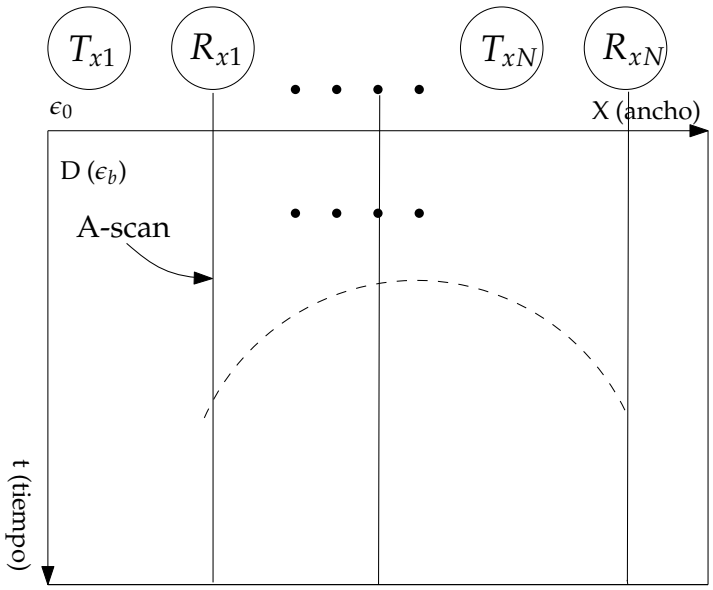


Figura 3.7 – Mediciones - B-scan.

La señal 2-D que se obtiene (B-scan) corresponde a una señal en el dominio temporal. Teniendo en cuenta que todo el desarrollo del modelo fue realizado en el dominio espectral (o su equivalente en el dominio k), es necesario transformar la señal. Para ello, se le aplicará la FFT respecto de la variable temporal y se utilizará las frecuencias correspondientes al ancho de banda del sistema. Por lo tanto, dado $x' = x_{t,i}$ y $x = x_{r,i}$ las posiciones del transmisor y receptor i-ésimo, las mediciones que se utilizará para realizar la inversión son:

$$E_{y_s}(x_{t,i}, x_{r,i}, k) = \mathrm{FFT}_{n_{tiempo}}\{E_{y_s}(x_{t,i}, x_{r,i}, n_{tiempo})\}. \tag{3.53}$$

Cada valor obtenido debe reemplazarse en (3.52).

3.1. Resolución numérica de la función de Green

A partir de la definición de la función de Green para 2 medios con una interfaz (3.24a), se observa que su cálculo exacto requiere implementar de forma numérica el cálculo de integrales costosas (integral de Sommerfield); mas aún, si se tienen N_f frecuencias y M_{tx-rx} posiciones para el conjunto Tx-Rx se deben calcular $N_f \times M_{tx-rx}$ veces. Si el cálculo para cada una de esas combinaciones resulta costoso, hacerlo para todas se vuelve inviable. Es por eso que se debe buscar métodos numéricos que permitan calcular dichas integrales de forma eficiente. Un método adecuado para eso es el **Método de fase estacionaria**, el cual permite el cálculo asintótico de integrales que tenga un integrando que oscile rápidamente.

Este tipo de integrales son del tipo:

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k_x) e^{j\alpha\phi(k_x)} dk_x, \tag{3.54}$$

donde $f(k_x)$ y $\phi(k_x)$ son funciones definidas como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y suaves tal que admiten desarrollo en serie de Taylor en un cierto intervalo $[a, b]$. Además, suponemos que el término imaginario de la función $\phi(k_x)$ toma valores $\ll 1$, es decir, $\phi(k_x) \approx \Re\{\phi(k_x)\}$.

Suponemos que $\phi'(c) = 0$, la derivada de la función para un punto $c \in [a, b]$, y que además $\phi'(k_x) \neq 0$ para el resto de puntos en $[a, b]$. Además, suponemos que $\phi''(k_x) \neq 0$ y $f(k_x) \neq 0$ en dicho intervalo y que $\mu = sign(\phi''(c))$. Entonces, hacemos un desarrollo en serie de Taylor hasta el segundo orden de la función $\phi(k_x)$ alrededor del punto c:

$$\phi(k_x) = \phi(c) + \frac{\phi''(c)}{2}(k_x - c)^2 + \mathcal{O}(k_x^3), \tag{3.55}$$

y obtenemos $\frac{\phi''(c)}{2}(k_x - c)^2 \approx (\phi(k_x) - \phi(c))$. Luego, debido a que la función $e^{j\alpha(\phi(k_x)-\phi(c))}$ es un función que para $\alpha \gg 1$ oscila muy rápidamente, la integral para valores por fuera de un intervalo pequeño alrededor de c decae muy rapidamente. Entonces:

$$I(\alpha) = e^{i\alpha\phi(c)} \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(k_x) e^{j\alpha\frac{\phi''(c)}{2}(k_x-c)^2} dk_x. \tag{3.56}$$

En dicho intervalo, la función $f(k_x)$, la cual es de variación lenta, es constante, tomando el valor $f(c)$:

$$I(\alpha) = e^{i\alpha\phi(c)} f(c) \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{j\alpha\frac{\phi''(c)}{2}(k_x-c)^2} dk_x. \tag{3.57}$$

Finalmente, $I(\alpha)$ se puede expresar como:

$$I(\alpha) = e^{i\alpha\phi(c)} f(c) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha\frac{\phi''(c)}{2}(k_x-c)^2} dk_x. \tag{3.58}$$

Se puede ver que la función en el integrando es una función gaussiana, cuya integral es un resultado conocido:

$$I(\alpha) = e^{i\alpha\phi(c)} f(c) \sqrt{\frac{2\pi j}{\alpha\phi''(c)}},$$

$$I(\alpha) = e^{i\alpha\phi(c)} f(c) \sqrt{\frac{2\pi j}{\alpha|\phi''(c)|}} \sqrt{j\mu},$$

$$I(\alpha) = e^{i\alpha\phi(c)} f(c) \sqrt{\frac{2\pi j}{\alpha|\phi''(c)|}} e^{\frac{\pi j\mu}{4}}. \tag{3.59}$$

Simulación Para validar el método, se calculó la función de Green (ecuación 3.21) usando el método de fase estacionaria y mediante integración por Monte Carlo. Se tomaron los siguientes parámetros: $x \in [-0{,}96, 0{,}96]$, $z = -0{,}5$, $x_0 = 0{,}06$, $z_0 = 0{,}2$, $\epsilon_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$ $\epsilon_2 = 6$, $\sigma_2 = 0{,}01$ y $f = 1.6\,\text{GHz}$. El resultado se muestra en la siguiente figura:

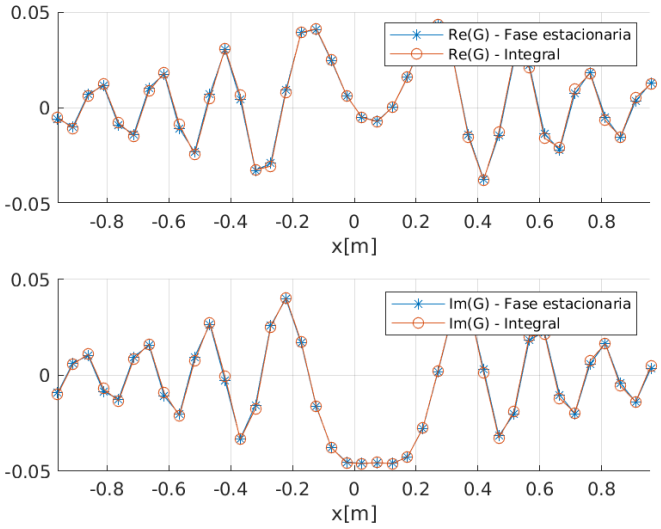


Figura 3.8 – Validación del método de fase estacionaria para el cálculo de la función de Green.

3.2. Discretización del modelo

Para poder aplicar el algoritmo en una computadora, es necesario discretizar el modelo. Para ello, se representa la función contraste, parámetro a estimar, en una cierta base, cuyos elementos son las funciones indicadores, es decir:

$$\phi^n(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathbf{r} \in D^n, \\ \\ 0 \text{ si } \mathbf{r} \notin D^n, \end{cases} \qquad n = 1, ..., N \tag{3.60}$$

donde D^n es el píxel n-ésimo y N es el número total de píxeles. Cabe mencionar que cada función base es uniforme para cada píxel. En términos físicos, esta representación equivale a decir que el escenario bajo observación tiene un tamaño mucho mayor a el/los objeto/s, lo que hace que la función contraste tome el valor 0 en casi todo punto del dominio de observación (la ecuación (3.40) es la definición de la función contraste). Este análisis cobrará sentido cuando se presente el capítulo siguiente.

En esta base, la función contraste queda expresada como:

$$\Delta\epsilon_r(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N} w_n \, \phi^n(\mathbf{r}), \tag{3.61}$$

donde el número de coeficientes $w_n \neq 0$ es S, siendo $S \ll N$. Reemplazando en la ecuación (3.47):

$$E_{y_s}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, k) = \imath J_0(k) k_0^2 \eta_0 \int_D g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', k) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', k) \sum_{n=1}^{N} w_n \, \phi^n(\mathbf{r}'') \mathrm{d}\mathbf{r}'', \tag{3.62}$$

$$E_{y_s}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, k) = \sum_{n=1}^{N} w_n \left[\imath J_0(k) k_0^2 \eta_0 \int_D g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', k) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', k) \phi^n(\mathbf{r}'') \mathrm{d}\mathbf{r}'' \right]. \tag{3.63}$$

A partir de la definición de las funciones bases $\phi^n(r'')$, la integral sobre el dominio D se calcula como:

$$\begin{aligned} \int_D g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', k) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', k) \phi^n(\mathbf{r}'') \mathrm{d}\mathbf{r}'' &= \sum_{i=1}^{M} \int_{D_n} g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', k) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', k) \mathrm{d}\mathbf{r}'' \\ &= Area(D_n) \cdot \sum_{n=1}^{N} g(\mathbf{r_n}, \mathbf{r}', k) g(\mathbf{r}, \mathbf{r_n}, k) \end{aligned} \tag{3.64}$$

En forma matricial, el modelo discreto puede formularse como:

$$\mathbf{E_{y_s}} = \mathbb{G}\mathbf{w}, \tag{3.65}$$

Suponiendo que se tienen M mediciones dadas por cada ubicación del sistema Tx/Rx, la matriz G pertenece a $\mathbb{C}^{M \times N}$ y $\mathbf{w}$ pertenece a $\mathbb{C}^{N \times 1}$. Teniendo en cuenta además que la ecuación (3.65) tiene dependencia con la frecuencia, se apilan, para cada conjunto de Tx/Rx, las N_f frecuencias tomadas al aplicar la FFT (3.53). Por lo tanto, la matriz $\mathbb{G} \in \mathbb{C}^{N_f \cdot M \times N}$, donde los primeros N_f elementos del vector de mediciones corresponden a las N_f frecuencias de la primer posición de Tx/Rx ($M = 1$). Por lo tanto, cada elementos de G será.

$$[G]_{lj} = \imath J_0(k_l) k_0^2 \eta_0 \int_D g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_l, k_l) g(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}'', k_l) \phi^j(\mathbf{r}'') \mathrm{d}\mathbf{r}'' \;\; , \;\; 1 \leq l \leq N_f \cdot M, \;\; 1 \leq j \leq N \tag{3.66}$$

3.3. Algoritmo

A continuación se muestra el algoritmo en pseudocódigo.

Algoritmo 1 Reconstrucción a través del operador de adjunto

1: **Entrada** $\{\mathbf{E}_{y_s}\}$
2: **for** $i \leftarrow 1, nRx_{max}$ **do**
3: Calcular parámetro c (Ver sección 3.1).
4: **end for**
5: **for** $i \leftarrow 1, nTx_{max}/nRx_{max}$ & $w \leftarrow freqInicial, freqFinal$ **do**
6: Calcular función de Green $G_{i,w}$ usando el método de fase estacionaria (ecuación (3.59))
7: Obtener imagen $I_{i,w}$ (ecuación 3.50)
8: $I = I + I_{i,w}$
9: **end for**
10: **return** $\{I\}$

3.4. Validación del modelo

En esta sección se valida que el campo obtenido a través de la ecuación (3.47), calculándolo en un escenario conocido y con una función contraste dada, coincida con el campo obtenido con el software *gprMax*. Para ello, se simularon dos escenarios: uno correspondiente a un único medio (aire) y un cilindro y otro compuesto por dos medios, donde uno de ellos es aire y el otro un medio de permitividad $\epsilon_b = 6$ y conductividad $\sigma_b = 0{,}01$. En este último, el cilindro se ubica en el segundo medio. El escenario, sin interfaz, se observa en la Fig. 3.9; el escenario 2 es similar, pero con una interfaz.

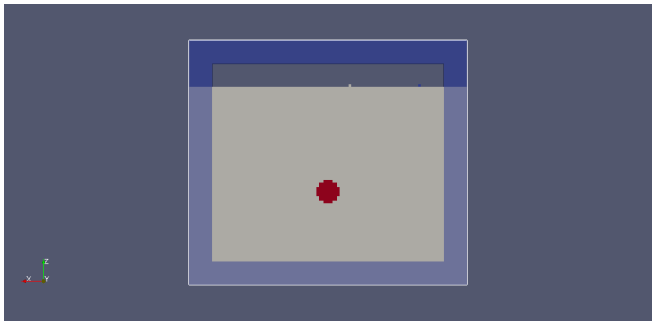


Figura 3.9 – Escenario de simulación generado por *gprMax*.

Escenario 2-D en el espacio libre Las condiciones de simulación de este escenario son las siguientes: $\epsilon_b = 1$, $\epsilon_s = 1{,}1$, $x_{max} = 0.24\,\text{m}$, $z_{max} = 0.17\,\text{m}$, $x_{cil} = 0.12\,\text{m}$, $z_{cil} = 0.08\,\text{m}$, $r = 0.01\,\text{m}$ y las posiciones de Tx y Rx son $x_{Tx} = 0.1\,\text{m}$, $x_{Rx} = 0.04\,\text{m}$ y $z_{Tx} = z_{Rx} = 0.17\,\text{m}$. En la siguiente figura se grafica el escenario con el detalle de qué es cada parámetro.

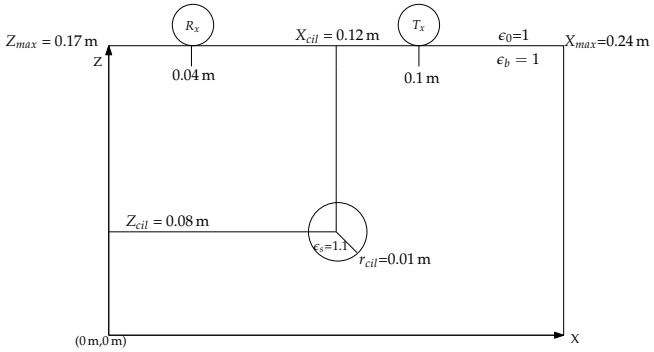


Figura 3.10 – Escenario de simulación sin interfaz.

El resultado obtenido se muestra en la Figura 3.11. Se grafican el campo eléctrico de *scattering* en el dominio temporal y en el de la frecuencia. Cabe mencionar que para el caso de la señal de *gprMax* se simuló el escenario sin cilindro y con cilindro, y se realizó la resta para obtener el campo de *scattering* generado por el cilindro.

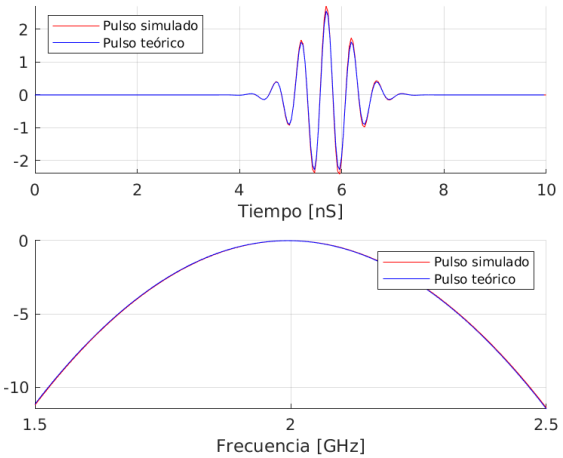


Figura 3.11 – Validación del modelo de scattering en tiempo y en frecuencia (normalizado a 0 dB) - sin interfaz.

Para analizar la validez de la simulación, se propone utilizar como métrica el máximo de la correlación cruzada entre las dos señales, es decir, si p es el campo eléctrico de *scattering* obtenido de forma teórica y $\hat{p}$ es la simulación, se define como métrica de similaridad:

$$\rho_{p,\hat{p}} = \max_n \frac{(p(k) * \hat{p}(-k))(n)}{\sqrt{\left(\sum_i p(i)^2\right)\left(\sum_j \hat{p}(j)^2\right)}}. \tag{3.67}$$

La simulación dio como resultado $\rho_{p,\hat{p}} = 0,99$.

Escenario 2-D con dos medios Las características para este caso son las siguientes: $\epsilon_b = 6$, $\sigma = 0{,}01$, $\epsilon_s = 6{,}2$, $x_{max} = 0.24\,\text{m}$, $z_{max} = 0.17\,\text{m}$, $x_{cil} = 0.12\,\text{m}$, $z_{cil} = 0.045\,\text{m}$, $r = 0.01\,\text{m}$ y las posiciones de Tx y Rx son $x_{Tx} = 0.1\,\text{m}$, $x_{Rx} = 0.04\,\text{m}$ y $z_{Tx} = z_{Rx} = 0.17\,\text{m}$. A continuación se muestra el gráfico con los parámetros.

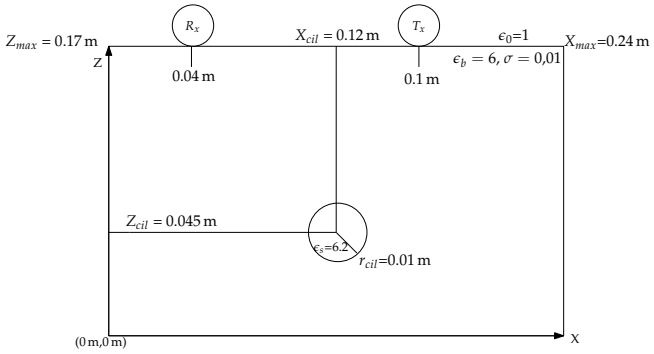


Figura 3.12 – Escenario de simulación con interfaz.

Nuevamente se utilizó la ecuación (3.67) como métrica de similaridad, dando como resultado $\rho_{p,\hat{p}} = 0,98$. En la Figura 3.13 se muestran las señales en tiempo y en frecuencia.

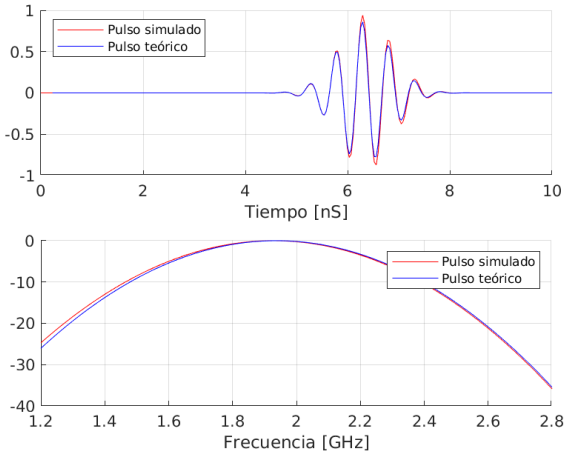


Figura 3.13 – Validación del modelo de scattering en tiempo y en frecuencia (normalizado a 0 dB) - con interfaz.

3.5. Limitaciones en la reconstrucción de una imagen

El modelo presentado en la sección anterior permite reconstruir, bajos ciertas hipótesis, el escenario iluminado. Para ello, desde el punto de vista teórico, es necesario conocer el campo eléctrico de scattering para todo x_s y x_r (en el intervalo $(-\infty, \infty)$), para toda frecuencia y de forma continua. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, es necesario acotar el dominio de observación, muestrear los puntos de medición, acotar el ancho de banda y muestrear en frecuencia. Estas limitaciones, que son efectos de truncamiento, hacen que sea necesario analizar cuales son los límites que imponen el sistema de medición para poder determinar en que situaciones no va a ser posibles obtener una imágen, o en caso de obtenerla, predecir las posibles diferencias respecto al resultado esperado.

3.5.1. Restricción en el dominio de observación

En primer lugar, se analizará los límites que genera acotar el dominio de observación. El efecto principal generado por limitar dicho dominio es establecer límites en la resolución de la imagen reconstruida y en el sistema de medición. Dichos límites se observan con mayor claridad si se trabaja en el dominio espectral, donde el ancho de banda se ve afectado.

Entonces, para poder analizar en el dominio espectral, es necesario definir ciertas relacionas.

Una primera definición es la transformada de Fourier espacial de la función contraste. Esta expresión se obtiene al reemplazar en la expresión del campo eléctrico de *scattering* (eq. 3.47):

$$E_{y_s}(\mathbf{r}) \approx \imath J_0 k_0^3 \eta_0 \int_{\{\mathbb{R}^2 : z<0\}} \Delta\epsilon_r(\mathbf{r}'') g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') d\mathbf{r}''. \tag{3.68}$$

Por teorema de reciprocidad:

$$E_{y_s}(\mathbf{r}) \approx \imath J_0 k_0^3 \eta_0 \int_{\{\mathbb{R}^2 : z<0\}} \Delta\epsilon_r(\mathbf{r}'') g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}) d\mathbf{r}''. \tag{3.69}$$

Para identificar la variables k_x y k_z para cada función de Green, se define k_{x_t} y k_{z_t} para $g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')$ y k_{x_r} y k_{z_r} para $g(\mathbf{r}'', \mathbf{r})$; además, se define la constante $A = ik_0^3\eta_0$ Entonces:

$$E_{y_s}(\mathbf{r}) \approx AJ_0 \int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} \Delta\epsilon_r(\mathbf{r}'') \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[T_+^{\mathrm{TE}}(k_{x_r}) \frac{1}{k_{0z_r}} e^{\imath k_{x_r}(x''-x) - \imath k_{1z_r} z'' + \imath k_{0z_r} z} \right. \\ \left. T_+^{\mathrm{TE}}(k_{x_t}) \frac{1}{k_{0z_t}} e^{\imath k_{x_t}(x''-x') - \imath k_{1z_t} z'' + \imath k_{0z_t} z'} \right] dk_{x_t} dk_{x_r} d,r'' \tag{3.70}$$

$$E_{y_s}(\mathbf{r}) \approx AJ_0 \int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} \Delta\epsilon_r(\mathbf{r}'') \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[T_+^{\mathrm{TE}}(k_{x_r}) T_+^{\mathrm{TE}}(k_{x_t}) \frac{1}{k_{0z_r}} \frac{1}{k_{0z_t}} \right. \\ \left. e^{\imath(k_{x_r}+k_{x_t})x''} e^{-\imath k_{x_r} x} e^{\imath k_{0z_r} z} e^{-\imath(k_{1z_r}+k_{1z_t})z''} e^{-\imath k_{x_t} x'} e^{\imath k_{0z_t} z'} \right] dk_{x_t} dk_{x_r} d\mathbf{r}''. \tag{3.71}$$

Tomando la interfaz en z = 0 y reagrupando:

$$E_{y_s}(\mathbf{r}) \approx AJ_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_+^{\mathrm{TE}}(k_{x_r}) T_+^{\mathrm{TE}}(k_{x_t}) \frac{1}{k_{0z_r}} \frac{1}{k_{0z_t}} \\ \left[\int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} \Delta\epsilon_r(\mathbf{r}'') e^{\imath(k_{x_r}+k_{x_t})x''} e^{-\imath(k_{1z_r}+k_{1z_t})z''} d\mathbf{r}'' \right] \\ e^{-\imath k_{x_r} x} e^{-\imath k_{x_t} x'} dk_{x_t} dk_{x_r}. \tag{3.72}$$

Se define entonces la transformada de Fourier espacial de $\Delta\epsilon_r(r)$ como:

$$\hat{X}(\eta, \nu) = \int_{\{\mathbb{R}^2:z<0\}} X(x'', z'') e^{j\eta x} e^{-j\nu z} d\mathbf{r}'' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(x'', z'') e^{j\eta x} e^{-j\nu z} dx'' dz'', \tag{3.73}$$

donde se utiliza la notación $X(x, z) = \Delta\epsilon(x, z)$, se reemplazó $k_{x_t} + k_{x_r}$ y $k_{z_t} + k_{z_r}$ por η y ν y se tuvo en cuenta que la función contraste para $z > 0$ (en vacío) es igual a 0. El cálculo con mayor detalle para obtener esta expresión se puede ver en [32].

A partir de la definición (3.73) se puede establecer un primer límite dado por la componente k_x, el cual debe cumplir

$$k_x \leq |k_1|. \tag{3.74}$$

Esta condición se debe cumplir tanto para k_{x_t} como k_{x_r} y puede deducirse de la expresión $k_z = \sqrt{k_1^2 - k_x^2}$, ya que si el término dentro de la raíz es negativo aparecería la exponencial negativa dada por $e^{-\Im(\sqrt{k_1^2 - k_x^2})}$; en dicho caso, se obtendría una onda evanescente.

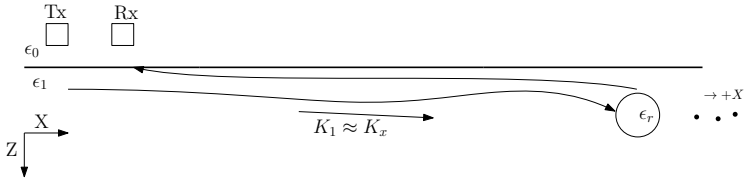
El hecho de que $k_x \leq |k_1|$ hace que

$$|k_1| \geq k_z = \sqrt{k_1^2 - k_x^2} \geq 0 \tag{3.75}$$

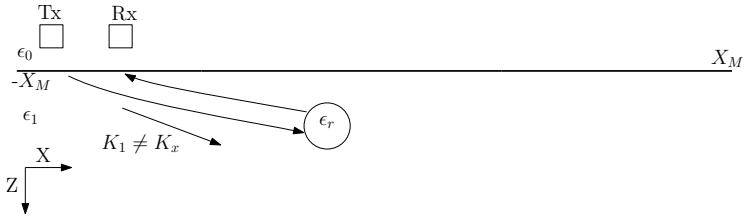
tanto para k_{z_t} como para k_{z_r}.

Los límites previos son para el caso en que se tiene que el dominio de observación no está acotado, ya que cuando $x_M \to \infty$ se alcanza el límite $k_x = |k_1|$. En este escenario, lo que uno tiene es una superposición infinita de ondas planas propagándose en la dirección de cada vector de onda. En la siguiente figura se representa este escenario, donde el sistema Tx/Rx

se ubica en una posición muy alejada de la posición en X del dominio de observación. Al acotar el dominio se está truncando la suma infinita de ondas planas, limitando las posibles direcciones de propagación. En las siguientes figuras se muestra el efecto mencionado.



(a) Escenario con dominio de observación no acotado.



(b) Escenario con dominio de observación acotado.

Figura 3.14 – Límite en la resolución horizontal al reconstruir la imágen

Entonces, al acotar el dominio de observación, el máximo valor posible para la componente k_x va a estar definido por $k_1 \sin(\theta_{max})$, siendo dicho ángulo el mínimo entre la mitad del ángulo de apertura de la antena y el ángulo entre la antena y el blanco, para el peor caso (Ver Figura 3.15). En términos matemáticos, el ángulo θ_{max} se define como

$$\theta_{max} = min\{\alpha_M, \tfrac{\Omega_A}{2}\}$$

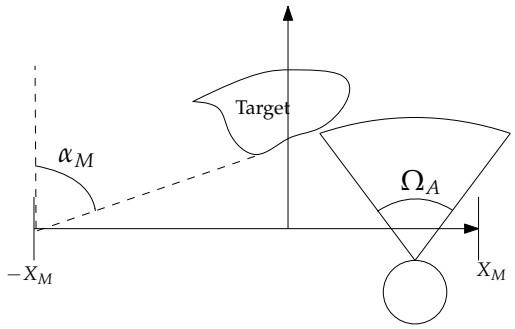


Figura 3.15 – Definición del ángulo máximo (izquierda) - Representación de dicho ángulo (derecha).

Debido a que tanto para k_{x_t} como para k_{x_r} se debe cumplir dicha condición, se tiene que

$$|\eta| \leq 2k_1 \sin(\theta_{max}). \tag{3.76}$$

Dado el máximo valor de k_x, el parámetro k_z también se ve afectado, ya que ahora debe ser mayor a 0 estrictamente. En particular, el mínimo valor va a estar dado por $k_{z_{min}} = \sqrt{k_1^2 - k_1^2 \sin^2(\theta_{max})} = k_1 \cos(\theta_{max})$. Luego, los límites estarán dados por $k_1 \cos(\theta_{max}) \leq k_z \leq k_1$, donde el máximo corresponde al caso en que la antena está en la misma posición en x

respecto del blanco. Por lo tanto:

$$2k_1 \cos(\theta_{max}) \leq |\nu| \leq 2k_1. \tag{3.77}$$

A partir de estas cotas, se puede concluir:

1. Cuanto más largo el dominio de integración, más grande es el intervalo de posibles valores de k_x, lo que mejora la inversión.
2. Cuanto más grande es la apertura de la antena, más grande es el intervalo de posibles valores de k_x, lo que mejora la inversión.
3. Cuanto más cerca de la interfaz está el objeto, mejor es la inversión. Cuanto más profundo se encuentra el objeto, más angosta es la función contraste en el dominio de la frecuencia espacial.

3.5.2. Resolución horizontal

Uno de las características a determinar del modelo es la resolución horizontal, es decir, la capacidad de poder detectar dos objetos distintos. Para ello, se toma como hipótesis que los objetos tienen las mismas características físicas y se encuentran en una misma profundidad.

El análisis se realizará para un objeto puntual, es decir, uno cuya función contraste sea $X(\mathbf{r}) = X_0\delta(x - x_0)\delta(z - z_0)$, por lo tanto, su transformada de Fourier es $\hat{X}(\eta, \nu) = X_0 \exp(-j\eta x_0) \exp(-j\nu z_0)$. La reconstrucción se hará entonces calculando la anti transformada de Fourier, limitando el dominio de observación al correspondiente a los límites obtenidos en el análisis previo, y aproximando el límite correspondiente a la frecuencia espacial ν por $2k_{min} \leq |\nu| \leq 2k_{max}$, evitando así la dependencia con η. Por lo tanto:

$$X(x, z) = \frac{X_0}{4\pi} \int\int_{D_f} \exp(-j\nu(x - x_0)) \exp(-j\eta(z - z_0)) \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\eta \tag{3.78}$$

siendo $D_f = \left\{(\eta, \nu) : -2k_1 \sin(\theta_{max}) \geq \eta \geq 2k_1 \sin(\theta_{max}),\ -2(k_{1_{max}} - k_{1_{min}}) \leq \nu \leq 2(k_{1_{max}} - k_{1_{min}})\right\}$. Resolviendo la integral se obtiene

$$X(x, z) = \frac{\frac{2X_0}{\pi^2}(B) \exp(j2k_{bc}(z - z_0))}{\pi c} \mathrm{sinc}(2k_{bc} \sin(\theta_{max})(x - x_0)) \mathrm{sinc}(\frac{2\pi B}{c}(z - z_0)), \tag{3.79}$$

donde $k_{bc} = \frac{k_{bmax} + k_{bmin}}{2}$ y $B = k_{bmax} - k_{bmin}$. Se observa que tanto en el eje horizontal como en el vertical la función contraste es una función sinc. Resulta razonable plantear entonces como separación mínima entre dos objetos aquella que haga que no se superponga los lóbulos de funciones sinc correspondientes a dos objetos distintos. El lóbulo principal para un cierto objeto tiene un ancho igual a $LP = \frac{\pi}{k_{bc} \sin(\theta_{max})} = \frac{\lambda_{bc}}{2 \sin(\theta_{max})}$. Por lo tanto, la separación mínima para distinguir entre dos objetos es:

$$HR \approx \frac{\lambda_{bc}}{2 \sin(\theta_{max})}. \tag{3.80}$$

Es importante destacar que este resultado no es absoluto, sino que permite tener un orden de magnitud de la separación mínima para lograr una buena reconstrucción.

Se observa una dependencia entre HR y $\sin(\theta_{max})$, lo que indica que la resolución horizontal depende de longitud del dominio de observación utilizado en el esquema de medición: cuanto más restringido sea el intervalo de medición (horizontal), más se degrada la resolución, ya que $\sin(\theta_{max}) \to 0$ a medida que el rango del intervalo se hace mas chico.

Para demostrar la validez del resultado, se realizó una prueba a partir de algunas simulaciones. Las condiciones de la simulación se puede observar en el siguiente esquema:

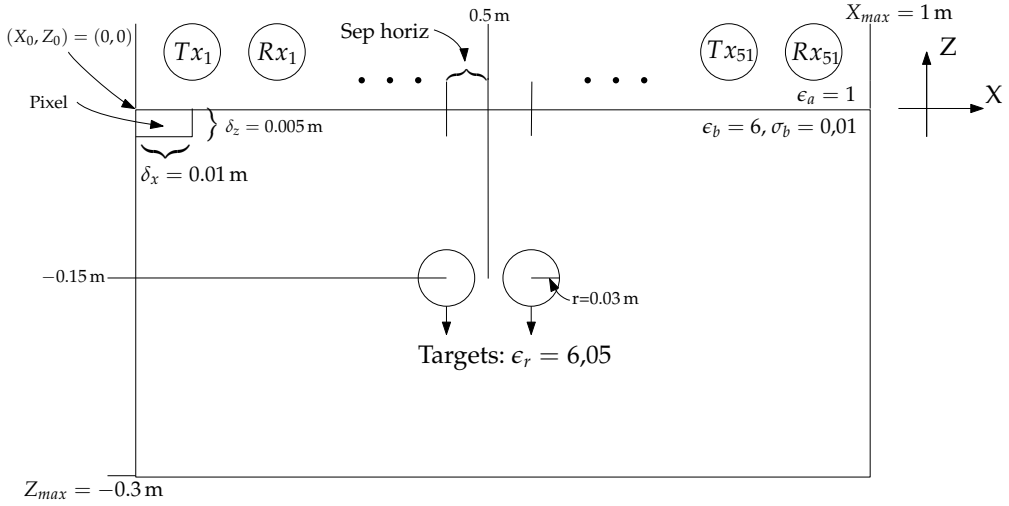
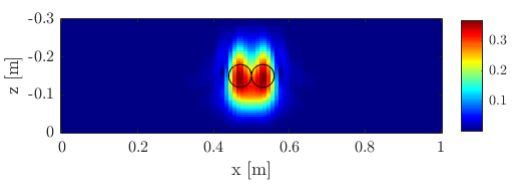


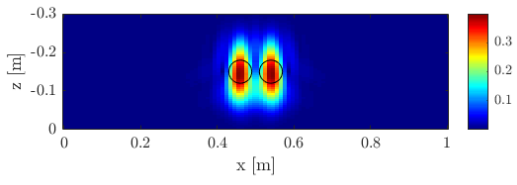
Figura 3.16 – Esquema del escenario utilizado.

donde *Sephoriz* es la variable que se varía para mover el cilindro en el eje horizontal. La señal utilizada es la descripta en 2.3.3. Esta misma señal se utilizó en las simulaciones que siguen en este capítulo. La reconstrucción se hizo aplicando el Algoritmo 1.

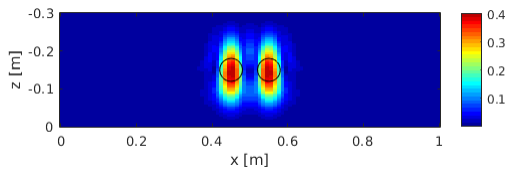
Para este escenario, el $HR = 0.0443$ m. A continuación se muestra como varía en función de la separación.



(a) Reconstrucción para sepHoriz=0.03 m



(b) Reconstrucción para sepHoriz=0.04 m



(c) Reconstrucción para sepHoriz=0.05 m

Figura 3.17 – Límite en la resolución horizontal al reconstruir la imágen

Se observa que efectivamente a partir de una separación mayor a 0.04 m se empieza a

poder detectar ambos objetos, y ya con 0.05 m se detectan perfectamente.

3.5.3. Resolución Vertical

El análisis para determinar la resolución mínima en el eje vertical es similar al realizo para el caso horizontal; es decir, a partir de la función contraste (3.79), la cual es proporcional a una sinc en el eje vertical, se puede determinar que la resolución mínima será la que asegure que no haya superposición entre los lóbulos principales de la sinc. Entonces:

$$VR = \frac{c}{B}. \tag{3.81}$$

donde B es el ancho de banda de la señal. Sin embargo, para el caso de la resolución vertical hay que tener ciertas consideraciones:

- Si ambos objetos se encuentran en la misma posición horizontal, i.e, están apilados, puede suceder que el objeto mas cercano a la interfaz emascare al de abajo, lo que degrade la reconstrucción. Es por ello que para analizar los resultados para este caso se tomó un objeto de muy baja permitividad; otra alternativa podría haber sido tomar un objeto mas pequeño aún.
- Existe un término de fase en la función contraste, el cual puede afectar la reconstrucción también. Si ambos objetos se encuentran apilados, dicho término puede sumarse de forma constructiva o destructiva, pudiendo degradar la reconstrucción.

A continuación se muestra un ejemplo. Las condiciones se muestran en el siguiente esquema.

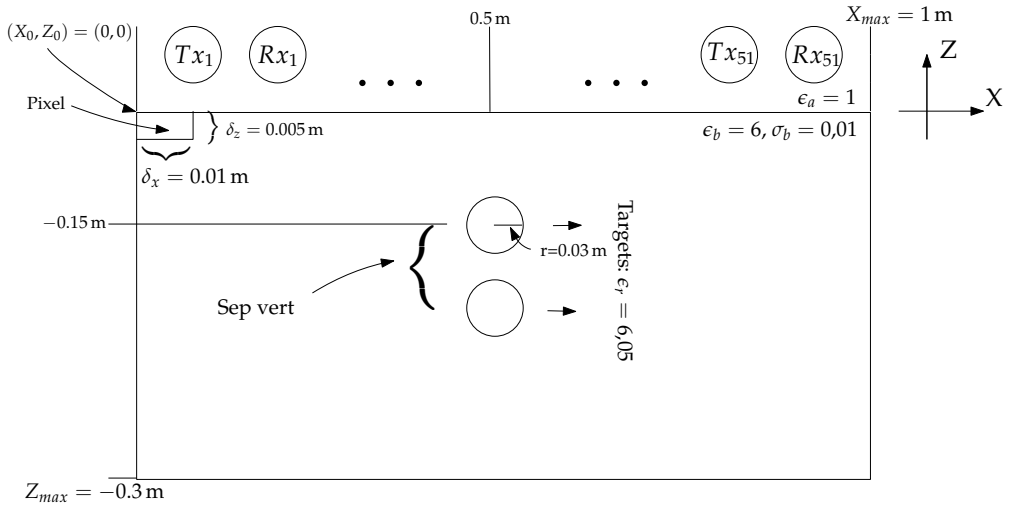
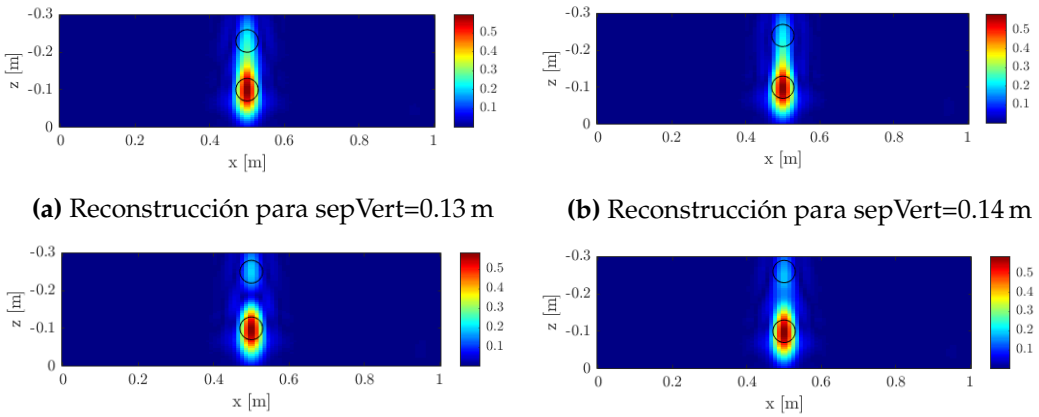


Figura 3.18 – Esquema del escenario utilizado.

donde *Sepvert* es la variable que se varía para mover el cilindro en el eje vertical. En este caso también se utilizó el Algoritmo 1.

Para este escenario, el $VR = 0.1224$ m. A continuación se muestra como varía en función de la separación.



(a) Reconstrucción para sepVert=0.13 m

(b) Reconstrucción para sepVert=0.14 m

(c) Reconstrucción para sepVert=0.15 m

(d) Reconstrucción para sepVert=0.16 m

Figura 3.19 – Límite en la resolución vertical al reconstruir la imágen.

Se observan dos cosas: en primer lugar, que el orden de magnitud de la resolución vertical es un buen indicador de la capacidad que va a tener el sistema de observar dos objetos a distinta profundidad. En segunda lugar, se pone de manifiesto el efecto que tiene el término de fase, ya que, a priori, para una separación mayor, la reconstrucción debería ser mas clara. Sin embargo, esto no sucede, ya que para una separación menor (0.15 m) la reconstrucción es mas clara que para una separación mayor.

3.5.4. Muestreo en *cross - range*

En el dominio espectral, la función contraste es una función de espectro acotado (ver análisis realizdo en sección 3.5.1). Luego, para evitar *aliasing* espacial, se debe cumplir con el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon:

$$k_{x,sampling} > 2k_{x,max} \tag{3.82}$$

siendo $k_{x,max} = 2k_1 sin(\theta_{max})$. Entonces, siendo $k = \frac{2\pi}{\Delta x}$ y $k_{1,max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}}$, se obtiene:

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{min}}{4 \sin \theta_{max}}. \tag{3.83}$$

Para verificar este resultado, se simuló el siguiente escenario:

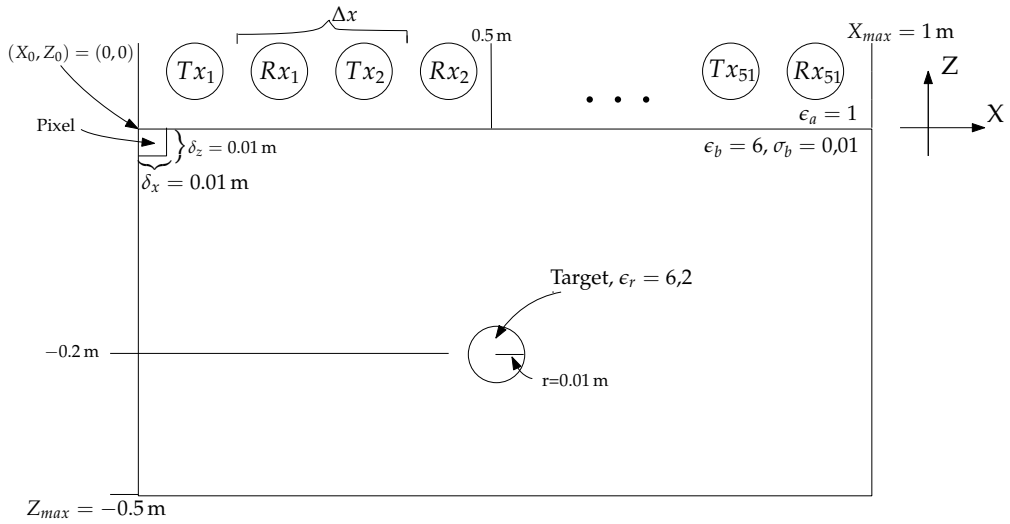


Figura 3.20 – Esquema del escenario utilizado.

El Δx mínimo es 0.0173 m, que corresponde a $nTx = 52$. Para poder comparar entre los distintos Δx, se utilizó la siguiente métrica:

$$RSE = \frac{1}{N_P} \frac{||\hat{\epsilon}_{obj} - \epsilon_b||_2}{||\epsilon_b||_2}. \tag{3.84}$$

Se obtuvo entonces:

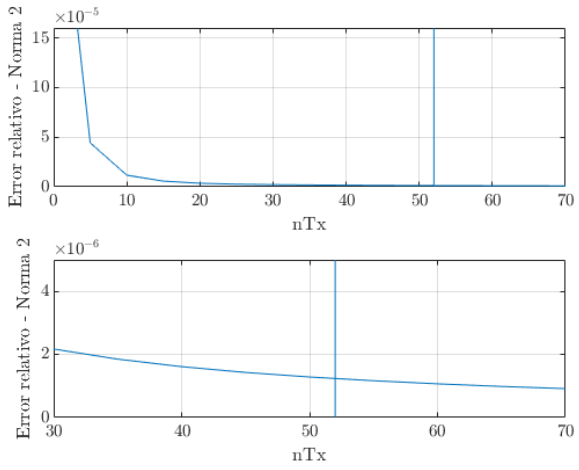


Figura 3.21 – RRMSE en función del muestreo horizontal.

3.5.5. Muestreo *depth - range*

Luego de analizar el límite del modelo en la dirección *cross - range* (horizontal), resta hacerlo en la dirección z, correspondiente a la profundidad. Para esta dirección, la información que se tiene no es espacial, sino que es temporal. Esto implica que a partir del campo $E_s(\mathbf{r}, t)$,

se debe transformar la variable temporal al dominio de la frecuencia f para luego hacer la migración a k_z. Existe una diferencia al momento de hacer el análisis entre el muestreo en la dirección vertical respecto de la horizontal, ya que la relación que existe entre la frecuencia f y la frecuencia espacial k_z es no lineal. Para simplificar el análisis, se aproxima dicha relación a una lineal ($k_z \approx k_b$). Entonces:

$$\Delta\nu = 2\Delta k_b = 2\frac{2\pi}{v_b}\Delta f. \tag{3.85}$$

Luego, recurriendo al teorema de Nyquist, se tiene que:

$$\Delta\nu \leq \frac{2\pi}{D} \tag{3.86}$$

siendo D la profundidad máxima bajo investigación. Por lo tanto, reemplazando se obtiene que:

$$\frac{\Delta\nu}{2\pi} = \frac{2}{v_b}\Delta f \leq \frac{1}{D} \rightarrow \Delta f \leq \frac{v_b}{2D}. \tag{3.87}$$

Para verificar el resultado obtenido, se simuló el escenario de la Figura 3.20. El Δf mínimo es 0.12 GHz. Se utilizó la misma métrica que para el caso del muestreo horizontal (3.84).

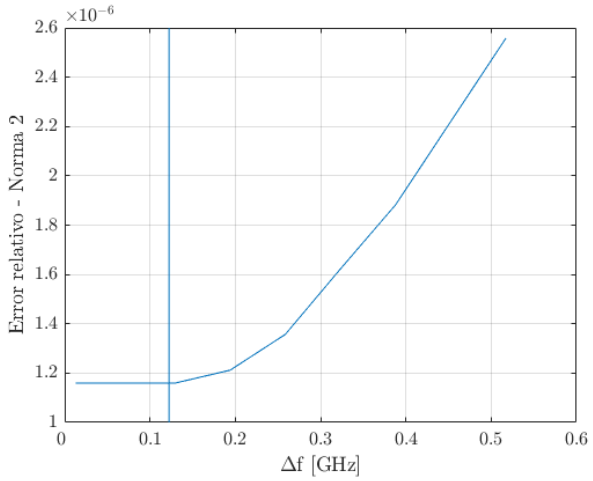


Figura 3.22 – RRMSE en función del muestreo vertical.

3.5.6. Límite dado por la aproximación de Born

Para demostrar la validez de la aproximación de Born, se realizaron simulaciones variando el radio del objeto y observando la imagen reconstruida, para observar a partir de que radio se deja de poder reconstruir completamente el objeto. El escenario utilizado en la simulación es el siguiente:

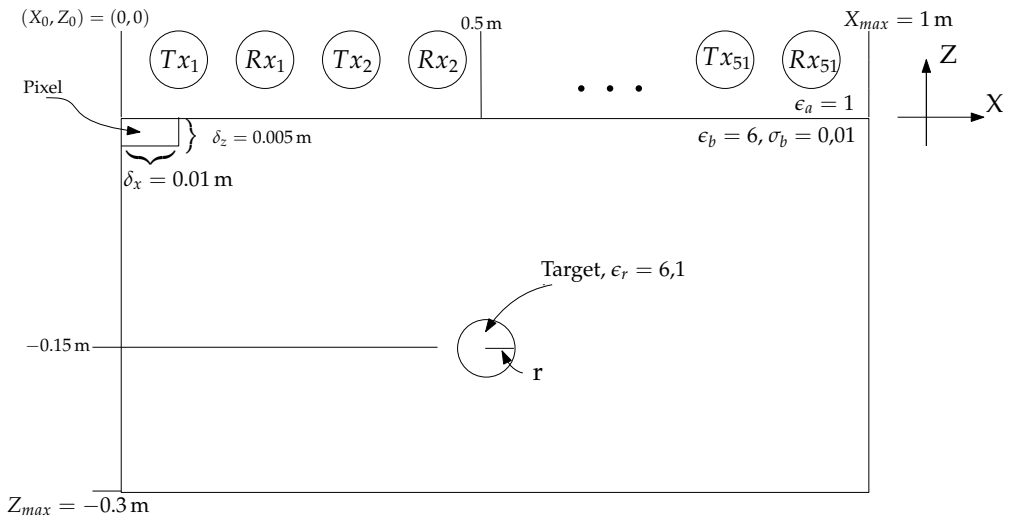
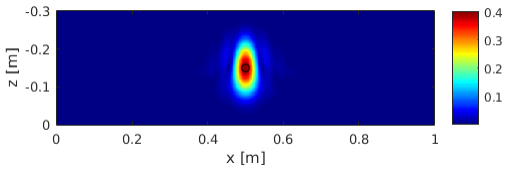
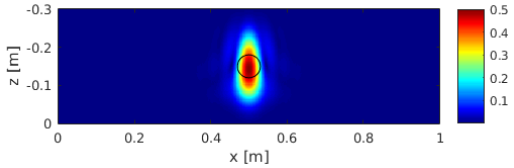


Figura 3.23 – Esquema del escenario utilizado.

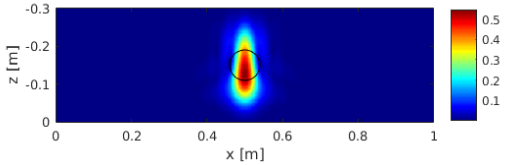
donde r es variable.



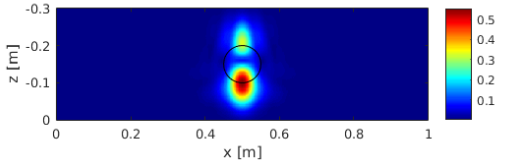
(a) Reconstrucción para r=0.01 m



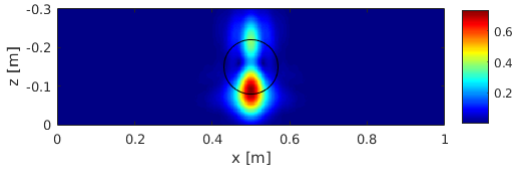
(b) Reconstrucción para r=0.03 m



(c) Reconstrucción para r=0.04 m



(d) Reconstrucción para r=0.05 m



(e) Reconstrucción para r=0.07 m

Figura 3.24 – Limite en la reconstrucción debido a la aproximación de Born.

El radio máximo obtenido de forma teórica a partir de la ecuación (3.48) es $r_{teo} = 0.062$ m, mientras que a partir de la simulación se observa un valor un poco menor a partir del cual se empieza a observar una reconstrucción parcial del objeto.

En cuanto a la variación de la permitividad, hallar una cota no es tan simple. Esto se

observa a partir de la ecuación (3.48):

$$r < \frac{\pi}{\max\{|k_r(x,z) - k_b|\}} \rightarrow \max\{|k_r(x,z) - k_b|\} < \frac{\pi}{r} \rightarrow |k_{0_{max}}\sqrt{\epsilon_{r_{max}}} - k_{0_{min}}\sqrt{\epsilon_{b_{min}}}| < \frac{\pi}{r}, \tag{3.88}$$

donde los máximos y mínimos son con respecto a las frecuencias máximas y mínimas del ancho de banda de la señal.

Para determinar el comportamiento de la reconstrucción de la imagen al variar la función contraste para un blanco con radio fijo, se simuló el escenario de la Figura (3.12); se utilizó un radio de 0.005 m.

Al calcular la energía del error dada por:

$$E(e[n]) = \sum_{n=1}^{N} (E_{y_s,sim} - E_{y_s,teo}), \tag{3.89}$$

donde la diferencia es entre el campo eléctrico obtenido con *gprMax* y el calculado a partir de la ecuación (3.42). Se observa que a medida que aumenta la función contraste, aumenta el error. Más aún, a partir de una cierto valor ($\Delta\epsilon_r = 0{,}5$) parece aumentar cada vez más rápido el error.

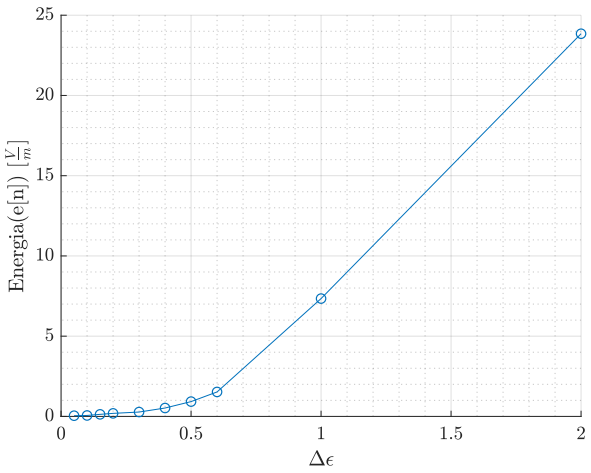


Figura 3.25 – Error de estimación variando la función contraste para 1 blanco con radio fijo - $\epsilon_b = 6$.

3.5.7. Resumen de los límites analizados

Límite	Ecuación	Valor para la antena GPR
Resolución horizontal entre blancos	$HR \approx \frac{\lambda_{bc}}{2\sin(\theta_{max})}$	$\frac{0{,}125}{2\sin(\theta_{max})}$
Resolución vertical entre blancos	$VR = \frac{c}{B}$	0.3 m
Muestreo en *cross - range*	$\Delta x \leq \frac{\lambda_{min}}{4\sin\theta_{max}}$	$\Delta x \leq \frac{0{,}125}{4\sin(\theta_{max})}$
Muestreo *depth - range*	$\Delta f \leq \frac{v_b}{2D}$	$\Delta f \leq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_b}2D}$
Límite aproximación de Born	$r < \frac{\pi}{\max\{\lvert k_r(r) - k_b \rvert\}}$	$r < \frac{\pi}{\{\lvert k_0\sqrt{\epsilon_{r_{max}}} - k_0\sqrt{\epsilon_{b_{min}}} \rvert\}}$

3.6. Conclusiones del capítulo

A lo largo de esta capítulo se realizó un estudio detallado del modelo de *scattering* en 2-D a través del uso de la función de Green. Se obtuvieron las ecuaciones para el caso de un escenario con una interfaz (dos medios), las cuales se implementaron de forma numérica. Luego se validó el modelo comparándolo contra las señales generadas con el software *gprMax*.

Validado el modelo, se establecieron los límites fundamentales que aparecen al reconstruir una imagen, con el fin hacer mas eficiente el armado de bancos de medición y tener mayor control de los resultados que se obtiene. Para demostrar la validez de los resultados obtenidos se hicieron distintas simulaciones.

Capítulo 4

Algoritmo *Sparse Bayesian learning*

En este capítulo se estudia un algoritmo de aprendizaje Bayesiano para poder estimar modelos del tipo:

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{N} w_i \phi_i(x) = \mathbf{\Phi w}, \tag{4.1}$$

donde $\phi_i(x)$ es una función base, que puede ser un vector de $\mathbb{R}^N$ y w_i los coeficientes asociados a cada función base; la dimensión de la matriz Φ es $N \times K$. Al tener un enfoque Bayesiano, permite introducir información *a priori* a través de funciones de densidad de probabilidad *a priori*. En este sentido, se tiene como información que los parámetros a estimar corresponden a un tipo de señal *sparse*. Por lo tanto, se buscará una función que priorice una solución *sparse*.

La razón de estudiar algoritmos que utilicen información *a priori*, en este caso la condición *sparse*, es poder introducir a partir de ese conocimiento una mejora, ya sea en la reconstrucción de la señal como en el sistema de adquisición de las mediciones.

En particular, en el caso de reconstrucción de imágenes a partir de señales de radar UWB, se persiguen dos objetivos:

- Reducir la complejidad del sistema de adquisición: por un lado existe cierta complejidad al trabajar con señales de gran ancho de banda, ya que se requieren equipos que puedan muestrear a tasas muy rápidas. Por otro lado, a partir de los límites establecidos en la sección anterior, se observa que el número mínimo de mediciones requeridas para tener una reconstrucción correcta pueden crecer en gran medida, requiriendo de grandes volúmenes de almacenamiento. Por lo tanto, un objetivo es reducir el número mínimo de muestras.

- Por otro lado, se busca reducir la dispersión (*clutter*) generada al utilizar el algoritmo presentado en el capítulo anterior.

El capítulo se divide en tres bloques: en primer lugar, se da una introducción al problema de estimar señales *sparse*, definiendo propiamente qué es una señal de ese tipo e introduciendo al problema de estimación usando *Compressed Sensing* (Sensado Comprimido). Luego, se desarrollan los fundamentos del algoritmo *Sparse Bayesian Learning* para finalmente aplicarlo al modelo desarrollado en el capítulo anterior.

4.1. Introducción

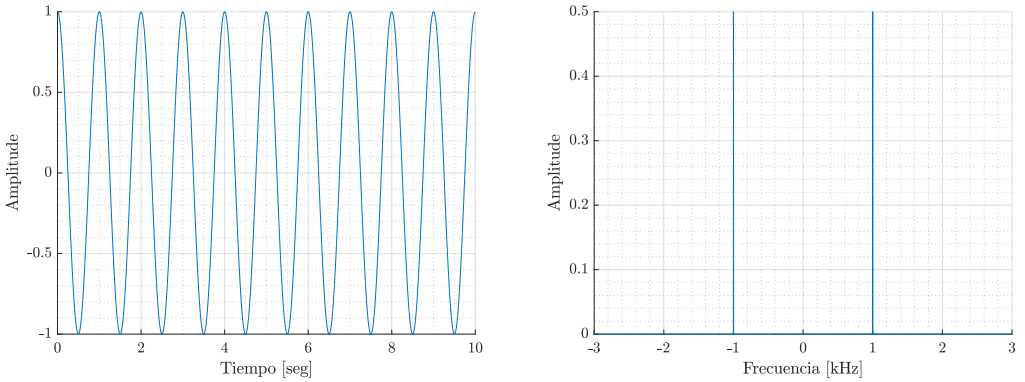
Al momento de realizar algún tipo de procesamiento digital de una señal, es necesario tomar muestras de la señal física para poder almacenarla en formato digital. Resulta fundamental tomar un período de muestreo de forma tal de que no se pierda información. Para ello, el teorema de Nyquist-Shannon establece cuál debe ser dicho período de forma tal de poder reconstruir la señal sin pérdida de información.

Sin embargo, existen muchas aplicaciones donde se busca poder comprimir la señal, de forma tal de poder disminuir la capacidad necesaria de almacenamiento. También se suele buscar aumentar el período de muestreo respecto del establecido por el teorema, para poder tomar menos muestras y así reducir la complejidad de la medición a realizar. *A priori*, comprimir una señal llevaría en la mayoría de los casos a perder información; implícitamente, esto equivale a decir que las señales no poseen redundancia y que todas las muestras tomadas son necesarias. Sin embargo, muchas veces sucede que las señales poseen redundancia, lo que lleva a la definición de señales *sparse*.

Definición 4.1.1. *La señal $x \in \mathbb{R}^N$ es s-sparse si*

$$||x||_0 = |\{x(k) \neq 0 : k = 1 \dots N\}| \leq s. \tag{4.2}$$

Esta definición implica que la señal x tiene a lo sumo s elementos no nulos. En general sucede que las señales propiamente dichas no son *sparse*, pero sí admiten una representación *sparse* en una cierta base. Un ejemplo clásico y representativo es el de la función armónica $f(t) = \sin(t)$. Esta función, en el dominio temporal, es claro que no es *sparse*. Sin embargo, si se la representa a través de su transformada de Fourier, la señal queda completamente representada por las deltas ubicadas en la frecuencia (positiva y negativa) correspondiente a la señal. Esto se observa en la siguiente figura, donde se grafica una función seno de 1 kHz.



(a) Señal temporal **(b)** Señal en el dominio de la frecuencia

Figura 4.1 – Ejemplo de señal *sparse* en una cierta base

Debido a las dimensiones de la matriz $\mathbf{\Phi}$, el problema de estimar los valores de $\mathbf{w}$ suele ser un problema mal condicionado (*ill-posed*), ya que el número de observaciones suele ser menor al número de funciones base y por lo tanto el de coeficientes a estimar. Esto lleva a obtener infinitas soluciones que se corresponden con las mediciones disponibles. Para poder

elegir una solución es necesario imponer algún tipo de condición extra; este condición que se impone se la suele llamar término de regularización.

El problema de estimar los coeficientes $\mathbf{w}$ puede formularse como un problema de optimización con restricciones.

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}}\{||\mathbf{t} - \mathbf{\Phi w}||_2^2 + \lambda||\mathbf{w}||_0\}. \tag{4.3}$$

Esta formulación se la conoce como *l-0 regularization*. Hay que tener en cuenta que $||.||_0$ no es una norma, sino una pseudonorma. El parámetro λ controla el peso relativo que tiene la energía del error de estimación y el término de regularización *sparse* (primer término y segundo término, respectivamente). Resolver este problema es NP-Hard, ya que el término de regularización es no convexo. Es por eso que se suele reemplazar a dicho término de regularización por $||.||_1$ (norma 1), la cuál es convexa. Entonces el problema pasa a formularse como uno de *l-1 regularization*:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}}\{||\mathbf{t} - \mathbf{\Phi w}||_2^2 + \lambda||\mathbf{w}||_1\}. \tag{4.4}$$

Este problema puede resolverse a través de distintos algoritmos, como los de programación lineal o algoritmos Greedy.

4.1.1. *Compressive Sensing*

Las señales *sparse*, tal como se mencionó, pueden ser comprimidas luego de tomar las muestras sin perder información. Cabe preguntarse entonces si no es posible tomar directamente un número de muestras de forma compacta (evitar el paso de compresión de las muestras tomadas). Surgen entonces las técnicas de sensado comprimido [35]. La idea es tomar muestras de forma aleatoria (*random projections*). De esta forma, si la matriz de muestreo es $\mathbf{\Psi}$, las muestras tomadas de forma aleatoria pueden representarse como:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi t}. \tag{4.5}$$

El problema queda definido entonces como:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi t} = \mathbf{\Psi\Phi w}. \tag{4.6}$$

La matriz $\mathbf{\Psi}$ se la llama matriz de sensado y debe cumplir con la propiedad RIP (*Restricted Isometry Property*, ver [14]). Un tipo de matriz que suele cumplir con dicha condición son las matrices aleatorias cuyos elementos pertenezcan a muestras de una distribución Gaussiana o Bernoulli.

El problema planteado en la ecuación (4.4) se reescribe de la siguiente forma

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}}\{||\mathbf{Z} - \mathbf{\Psi\Phi w}||_2^2 + \lambda||\mathbf{w}||_1\}. \tag{4.7}$$

El marco planteado en esta sección es determinístico. Una de las principales complicaciones que tiene este enfoque es poder asegurarse que la matriz $\mathbf{\Psi\Phi}$ cumpla con la propiedad RIP.

Un enfoque alternativo es plantear el problema desde un punto de vista probabilístico, en particular, Bayesiano. Esto fue planteado por primera vez en [15]. En este enfoque se utiliza el algoritmo *Sparse Bayesian Learning*, el cual fue introducido por primera vez por Tipping et al. [16], [36]. Utilizar un enfoque Bayesiano tiene como principales ventajas evitar tener que utilizar una matriz de sensado que tenga que cumplir con la condición RIP y dar intervalos de confianza para la estimación obtenida.

4.2. Sparse Bayesian Learning

4.2.1. Planteo del problema

Dado ciertas entradas $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K$, el objetivo es hallar una función que mapee dichas entradas al espacio de mediciones representado por $t \in \mathbb{R}$, basado en ciertas muestras de aprendizaje $\{\mathbf{x}_n, t_n\}_{n=1}^N$. La función que mapea de un espacio a otro es $y(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, siendo $\mathbf{w}$ un conjunto de parámetros correspondientes a los coeficientes de la base utilizada; en otras palabras, le da 'forma' a la función. A su vez, para fijar la condición *sparse*, los parámetros $\mathbf{w}$ se modelan como variables aleatorias con una cierta distribución *a priori*, con el objetivo de obtener una distribución *a posteriori* esté muy concentrada en cero para los términos que no agregan información.

En términos matemáticos la relación entre las entradas y la función $y(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ puede expresarse como:

$$y(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} w_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + w_0, \tag{4.8}$$

donde la función $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ se denomina función *kernel*. A su vez, la relación entre las mediciones y las entradas está dada por un modelo lineal con ruido aditivo gaussiano de media nula y varianza σ^2:

$$t_n = y(\mathbf{x_n}, \mathbf{w}) + N \ , \ \ N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{4.9}$$

En términos probabilísticos, esto puede expresarse como:

$$p(t_n|\mathbf{w}, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(y(\mathbf{x}, \mathbf{w}), \sigma^2) \tag{4.10}$$

siendo ésta la función de likelihood. Para el caso en que se defina una matriz de diseño, compuesta por vectores $\phi_i(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$, siendo el vector $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_n) = [1, K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) \dots K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_N)]^T$, la ecuación (4.9) puede expresarse de forma matricial como:

$$\mathbf{t} = \mathbf{\Phi w} + \mathbf{N}. \tag{4.11}$$

El ruido puede interpretarse como la suma del error del instrumento de medición y el error de omitir el uso de ciertos coeficientes de $\mathbf{w}$, cuya magnitud es pequeña. En particular, descomponiendo el vector $\mathbf{w}$ como $\mathbf{w_s} + \mathbf{w_e}$, donde $\mathbf{w_s}$ es un vector con los M elementos de mayor magnitud y el resto iguales a 0, y $\mathbf{w_e}$ es un vector con los N-M elementos de menor magnitud y el resto iguales a 0, se tiene:

$$\mathbf{t} = \mathbf{\Phi w} = \mathbf{\Phi w_s} + \mathbf{\Phi w_e} + \mathbf{n}_m \rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{\Phi w_e} + \mathbf{n}_m. \tag{4.12}$$

Habiendo definido la función de *likelihood* (4.10), resta determinar las densidades que van a ser utilizadas para modelar el resto de los términos.

La definición de la distribución *a priori* sobre los parámetros $\mathbf{w}$ resulta de vital importancia para poder regularizar el problema e introducir la condición de *sparsidad*.

Un primer análisis llevaría a definir como función de densidad *a priori* una Laplaciana. Al usar esta densidad, se busca tener un problema equivalente al dado por la ecuación (4.4), ya que la función de densidad Laplaciana es:

$$p(\mathbf{w}|\lambda) = (\frac{\lambda}{2})^N \, exp(-\lambda \sum_{i=1}^{N} |w_i|), \tag{4.13}$$

donde se observa que esta función de densidad es el equivalente a la norma 1 utilizada como término de regularización. El inconveniente que presenta el uso de una distribución Laplaciana para la *a priori* del parámetro es que la solución al problema no puede obtenerse de forma cerrada, ya que la distribución Laplaciana no es una conjugada *a priori* de la distribución Gaussiana.

Para obtener una forma cerrada, Tipping en su formulación original propuso utilizar una distribución *a priori* jerárquica.

4.2.2. Distribución *a priori* jerárquica

En primer lugar, se define la función densidad *a priori* de $\mathbf{w}$ como:

$$p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^{N} p(w_i|\alpha_i), \tag{4.14}$$

donde $\mathbf{w}$ es un vector de N componentes; $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector de N hiperparámetros. Para cada componente del vector $\mathbf{w}$ existe un hiperparámetro que controla el peso del mismo. La distribución *a priori* para cada w_i es una gaussiana:

$$p(w_i|0, \alpha_i^{-1}) \sim \mathcal{N}(0, \alpha_i^{-1}). \tag{4.15}$$

Resta definir la densidad hiper-*a priori* del vector $\boldsymbol{\alpha}$ para completar el modelo jerárquico, junto con la del parámetro σ^2 correspondiente a la función de likelihood.

$$p(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=0}^{N} Gamma(\alpha_i|a, b),$$

$$p(\sigma^2) = Gamma(\sigma^2|c, d).$$

Este tipo de densidad *a priori* se conocen como *scale density*, las cuales permiten utilizar *a priori* no informativa (mismo peso para todos los parámetros) [37]. Para ello, si se fijan los parámetros a,b,c,d igual a cero, se obtiene hiper-a priori uniformes, en una escala logarítmica (ver [16]). La ventaja que tiene utlizar este tipo de *a priori* es que la inferencia se vuelve invariante frente a cambios en la unidad de las mediciones.

Definido el modelo, el último paso es definir que problema busca solucionarse; esto es, estimación, predicción o clasificación.

Para el caso de inferencia, y haciendo uso de la *a priori* jerárquica, lo que se busca es calcular la función de densidad *a posteriori*, dada por:

$$p(\mathbf{w}, \sigma^2, \boldsymbol{\alpha}|\mathbf{t}). \tag{4.16}$$

Para el caso de hacer predicción, el objetivo es poder calcular:

$$p(t^*|\mathbf{t}) = \int p(t^*|\mathbf{w}, \sigma^2, \boldsymbol{\alpha}) p(\mathbf{w}, \sigma^2, \boldsymbol{\alpha}|\mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{w} \mathrm{d}\sigma^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}. \tag{4.17}$$

Por último, para el caso de clasificación se debe modificar el target, ya que para esta situación este pasaría a ser la clase a la que pertenece la entrada. Cabe mencionar que el problema que se va desarrollar en el marco de esta tesis es el de inferencia, ya que el objetivo es poder estimar la función contraste del dominio de observación en el problema de inversión de señales GPR-UWB.

4.2.3. Representación gráfica

Gráficamente, el modelo mencionado puede ser representado a través de un modelo gráfico o grafo probabilístico. Los grafos permite visualizar de forma clara cuales son las dependencias entre variables.

En nuestro caso particular nos interesa los grafos del tipo dirigido y acíclico. Un ejemplo de este tipo de grafos puede observarse en la siguiente figura:

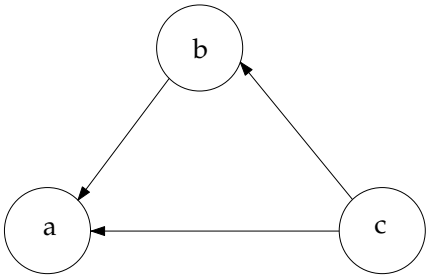


Figura 4.2 – Ejemplo de un modelo gráfico.

Cada nodo corresponde a una variable aleatoria. A su vez, la relación entre los nodos define una función de densidad condicional, donde si, por ejemplo, la flecha va del nodo c al nodo a, el primero es el nodo padre y el segundo el nodo hijo. Entonces, la función de densidad conjunta del grafo puede factorizarse como:

$$p(a, b, c) = p(a|b, c)p(b|c)p(c). \tag{4.18}$$

Para el caso del modelo desarrollado en las secciones anteriores, la estructura gráfica se observa en la siguiente figura:

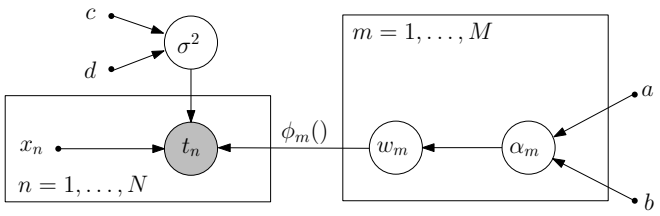


Figura 4.3 – Modelo gráfico del modelo utilizado en el algoritmo SBL.

donde las variables sombreadas son variables a las que se tiene acceso, es decir, pueden medirse, mientras que el resto son variables ocultas. Las que no están dentro de un círculo son variables determinísticas.

Entonces la función de densidad conjunta correspondiente al grafo puede factorizarse como:

$$p(\sigma^2, \mathbf{t}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}) = p(\mathbf{t}|\mathbf{w}, \sigma^2)p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{\alpha})p(\sigma^2), \tag{4.19}$$

donde se observa que la factorización obtenida corresponde al modelo desarrollado: el primer factor de la ecuación, que corresponde a la función de likelihood, el segundo a la función *a priori* de los coeficientes de la base y el resto de los factores a las hiper *a priori* de los hiperparámetros.

4.2.4. Estimación

Como fue mencionado, el problema de estimación consiste en calcular la función de densidad de *a posteriori*; para ello, se aplica la fórmula de Bayes:

$$p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2|\mathbf{t}) = \frac{p(\mathbf{t}|\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)}{p(\mathbf{t})}. \tag{4.20}$$

En el enfoque Bayesiano, suele suceder que el calculo de forma cerrada es inviable, debido a que el término de normalización $p(\mathbf{t}) = \int p(\mathbf{t}|\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)\mathrm{d}\mathbf{w}$ es una integral multidimensional, cuyo cálculo no es posible hacerlo. Distintos métodos existen para poder calcularla de forma aproximada.

En este caso, se propone reescribir la ecuación (4.20) como:

$$p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2|\mathbf{t}) = p(\mathbf{w}|\mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)p(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2|\mathbf{t}). \tag{4.21}$$

Luego, aplicando Bayes al primer factor:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) = \frac{p(\mathbf{t}|\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)}{p(\mathbf{t}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)} = \frac{p(\mathbf{t}|\mathbf{w}, \sigma^2)p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\alpha})}{p(\mathbf{t}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)}. \tag{4.22}$$

Se observa que el término de normalización $p(\mathbf{t}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) = \int p(\mathbf{t}|\mathbf{w}, \sigma^2)p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\mathbf{w}$ es posible calcularlo debido a que el integrando es un producto de dos densidades normales, y por lo tanto el resultado es una distribución normal. La elección de la distribución *a priori* jerárquica es una condición necesaria para poder calcular dicha integral. Los parámetros de la normal obtenida son:

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma^{-2}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{A})^{-1}\ ,\ \mathbf{A} = diag(\alpha_0, ..., \alpha_N), \tag{4.23}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \sigma^{-2}\Sigma\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{t}. \tag{4.24}$$

Para completar el cálculo de la ecuación (4.21), resta obtener una expresión cerrada para el segundo factor. Es necesario entonces realizar una aproximación, ya que no es posible calcular la distribución *a posteriori* de los hiperparámetros. Dicha aproximación consiste en reemplazar la función de densidad por una delta centrada en la moda; en otras palabras, se toma como hipótesis que la mayor parte de la probabilidad está acumulada en la moda. Una análisis de la validez de esta hipótesis se realiza en el apéndice C. Entonces, la distribución *a posteriori* se aproxima de la siguiente forma:

$$p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2|\mathbf{t}) \approx p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}_{MAP}, \sigma^2|\mathbf{t}). \tag{4.25}$$

El problema entonces pasa a ser la obtención de los valores de los hiperparámetros que maximizan la distribución *a posteriori* de los parámetros dadas las mediciones, siendo $p(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2|\mathbf{t}) \propto p(\mathbf{t}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)p(\alpha)p(\sigma^2)$.

Para el caso mencionado previamente (i.e, el de *a priori* uniformes), el término que termina siendo necesario maximizar es $p(\mathbf{t}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$. Entonces:

$$p(\mathbf{t}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) = \int p(\mathbf{t}|\mathbf{w}, \sigma^2)p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\mathbf{w} \tag{4.26}$$

cuyo resultado es una distribución Gaussiana $p(\mathbf{t}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu_L}, \boldsymbol{\Sigma_L})$, cuyos parámetros son:

$$\boldsymbol{\mu_L} = 0, \tag{4.27}$$

$$\boldsymbol{\Sigma_L} = (\sigma^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T)^{-1}. \tag{4.28}$$

La función (4.26) se la llama *marginal likelihood*. Se observa que los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ y σ^2 no pueden ser calculado de forma cerrada, ya que dependen de los parámetros de la densidad $p(\mathbf{t}|\mathbf{w}, \sigma^2)$. Es por ello que se debe recurrir a métodos iterativos. Existen distintas alternativas: la mas tradicional y utilizada es *type II maximum likelihood* (también llamado *evidence framework*), introducida en [38]; otras posibles son alguna variante del algoritmo MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*), basado en el método Monte Carlo, debido a la estructura iterativa del modelo propuesto ([39]) o alguna variante de los métodos variacionales. La razón por la que se suele utilizar el método *type II maximum likelihood* es a la alta eficiencia computacional.

Una vez obtenido los máximos *a posteriori* de los hiperparámetros $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{MP}$ y $\sigma^2 = \sigma^2_{MP}$, la estimación de los parámetros w será $\hat{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\mu}$. Cabe destacar que, debido a la condición de *sparsidad*, la mayor parte de los hiperparámetros tienden a infinito lo que da como resultado solo unos pocos valores de $\boldsymbol{\mu}$ distintos de cero (a partir de observar las ecuaciones (4.23) y (4.24) se deduce este resultado).

4.2.5. *Type II maximum likelihood*

Este método consiste en obtener, de forma iterativa, los valores de $\boldsymbol{\alpha}$ y σ^2 que maximizan la función *marginal likelihood*. Para ello, se deriva la función respecto a $\boldsymbol{\alpha}$ y también respecto a σ^2. Se obtiene:

$$\alpha_i^{nuevo} = \frac{\gamma_i}{\mu_i^2}\ ,\ \gamma_i = 1 - \alpha_i \Sigma_{ii}, \tag{4.29}$$

$$(\sigma^2)^{nuevo} = \frac{||\mathbf{w} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\mu}||^2}{N - \sum_i \gamma_i}, \tag{4.30}$$

donde μ_i es la componente i-ésima del vector calculado en la ecuación (4.23), Σ_{ii} el i-ésimo elemento de la diagonal de la matriz calculada en la ecuación (4.24) y N el número de muestras.

El parámetro $\gamma_i \in [0, 1]$, y representa que tan bien determinado está el elemento Y_i. Si α_i es muy grande, entonces Y_i está condicionado fuertemente por la a priori, lo que da como resultado $\Sigma_{ii} \sim \alpha_i^{-1}$, dando un $\gamma_i \sim 0$.

Se observa que $\boldsymbol{\alpha}$ y σ^2 dependen de $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ y viceversa. Esto sugiere una solución iterativa hasta que exista una convergencia que cumpla con algún criterio pre-establecido.

4.2.6. *Fast Type II maximum likelihood*

Debido a que el método original puede ser costoso computacionalmente además de presentar una convergencia lenta, otro método conocido como *Fast Type II maximum likelihood* fue desarrollado por M. Tipping, presentado en [40].

Se define $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = log(p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2))$, lo que da como resultado:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\left[N \log(2\pi) + \log|\boldsymbol{\Sigma_L}| + t^T \boldsymbol{\Sigma_L}^{-1} t\right]. \tag{4.31}$$

Considerando la dependencia de $\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})$ con respecto a un único hiperparámetro α_i, la matriz de covarianza Σ_L puede reescribirse como:

$$\Sigma_L = \sigma^2\mathbf{I} + \sum_{m\neq i} \alpha_m^{-1}\phi_m{\phi_m}^T + \alpha_i^{-1}\phi_i{\phi_i}^T. \tag{4.32}$$

Definiendo Σ_{-i} como la matriz Σ_L con la eliminación del término i-ésimo $\alpha_i^{-1}\phi_i{\phi_i}^T$:

$$\boldsymbol{\Sigma_L} = \boldsymbol{\Sigma_{-i}} + \alpha_i^{-1}\phi_i{\phi_i}^T. \tag{4.33}$$

Se debe calcular entonces $|\boldsymbol{\Sigma_L}|$ y ${\boldsymbol{\Sigma_L}}^{-1}$. Para ello, se utilizan dos propiedades: el lema del determinante de una matriz y la identidad de Woodbury.

Lemma 4.2.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada inversible y* $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ *dos vectores columna. Entonces, el lema del determinante de una matriz establece que:*

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{u}\ \mathbf{v}^T) = (1 + \mathbf{v}^T\ \mathbf{A^{-1}}\ \mathbf{u})\ \det(\mathbf{A}).$$

Identidad de Woodbury: Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ matrices de $n \times n$, $n \times k$, $k \times k$ y $k \times n$ respectivamente. Entonces:

$$(A + BCD)^{-1} \ = \ A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA{-}1B)^{-1}DA^{-1}.$$

Aplicando el lemma 2.1 a la ecuación (4.33):

$$|\boldsymbol{\Sigma_L}| = |\Sigma_{-i} + \alpha_i^{-1}\phi_i{\phi_i}^T| = |\Sigma_{-i}|\ |1 + \alpha_i{\phi_i}^T\Sigma_{-i}^{-1}\phi_i|. \tag{4.34}$$

Aplicando la identidad de Woodbury a la ecuación (4.33):

$$(\boldsymbol{\Sigma_{-i}} + \alpha_i^{-1}\phi_i{\phi_i}^T)^{-1} = {\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1} - \frac{{\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1}\phi_i{\phi_i}^T{\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1}}{\alpha_i + {\phi_i}^T{\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1}\phi_i}. \tag{4.35}$$

Con los dos últimos resultados, la ecuación (4.31) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\Bigg[N\log(2\pi) + \log|\boldsymbol{\Sigma_{-i}}| + \log\left(\frac{\alpha_i + \alpha_i{\phi_i}^T\Sigma_{-i}^{-1}\phi_i}{\alpha_i}\right) + \\ t^T{\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1}t - t^T\left(\frac{{\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1}\phi_i{\phi_i}^T{\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1}}{\alpha_i + {\phi_i}^T{\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1}\phi_i}\right)t\Bigg].\end{aligned} \tag{4.36}$$

Se observa que al reescribir la función de *likelihood* marginal de la forma que se hizo, queda expresada en términos de la función de *likelihood* de todos los hiperparámetros sin α_i y los términos correspondientes al i-ésimo α:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}_{-i}) + \frac{1}{2}\left[\log(\alpha_i) - \log(\alpha_i + s_i) + \frac{q_i^2}{\alpha_i + s_i}\right] = \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}_{-i}) + l(\alpha_i), \tag{4.37}$$

donde se definió:

$$s_i \triangleq {\phi_i}^T{\boldsymbol{\Sigma_{-i}}}^{-1}\phi_i, \tag{4.38}$$

$$q_i \triangleq {\phi_i}^T {\boldsymbol{\Sigma}_{-i}}^{-1} t. \tag{4.39}$$

Estos dos factores representan el grado de *sparsidad* y de calidad respectivamente. El término de sparsidad es una medida de cuanta superposición hay entre la base i-ésima y las que ya están presentes en el modelo. El otro término representa que tan alineado está la base i-ésima con el error de estimación sin tener en cuenta dicha base.

Para entender con mayor claridad que papel cumplen estos valores, a continuación se calculan la primer y segunda derivada de la función de *likelihood*.

Primera derivada

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_i + s_i} - \frac{q_i^2}{(\alpha_i + s_i)^2}\right]. \tag{4.40}$$

Reagrupando los términos, la primera derivada termina siendo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \frac{\alpha_i^{-1} s_i^2 - (q_i^2 - s_i)}{2(\alpha_i + s_i)^2}. \tag{4.41}$$

Teniendo en cuenta que lo que se busca es maximizar $\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})$, se buscan los puntos estacionarios: uno de ellos es $\alpha_i = \infty$ y el otro es:

$$\alpha_i = \frac{s_i^2}{q_i^2 - s_i}. \tag{4.42}$$

Debido a que $\alpha_i > 0$, se desprende que $q_i^2 > s_i$. Para determinar si los puntos estacionarios obenidos son máximos o mínimos, se debe calcular la segunda derivada.

Segunda derivada

Al derivar por segunda vez la función de *likelihood*, se obtiene:

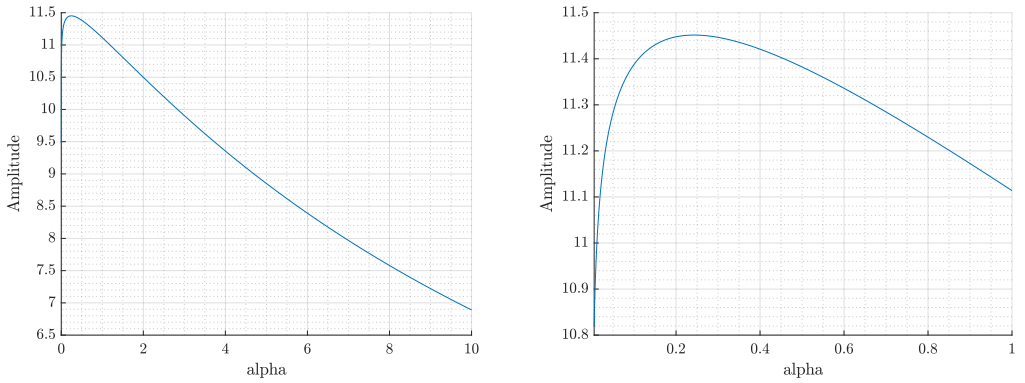
$$\frac{\partial^2 l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i^2} = \frac{-\alpha_i^2 s_i^2 (\alpha_+ s_i)^2 - 2(\alpha_i + s_i)[\alpha_i^{-1} s_i^2 - (q_i^2 - s_i)]}{2(\alpha_i + s_i)^4}. \tag{4.43}$$

El análisis entonces se separa en los dos casos mencionados previamente: α_i finito e infinito.

Caso α_i finito Reemplazando (4.42) en (4.43) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i^2} = \frac{-s_i^2}{2\alpha_i^2(\alpha_i + s_i)^2}. \tag{4.44}$$

Queda claro que siempre toma valores negativos, por lo que para el caso de α_i finito, $l(\alpha_i)$ tiene un máximo global.



(a) *Marginal Likelihood* para un α_i con $q_i = 20$ y $s_i = 15$

(b) *Marginal Likelihood* para un α_i con $q_i = 20$ y $s_i = 15$ - Zoom en el máximo

Figura 4.4

Caso α_i infinito En este caso, tanto (4.41) como el resto de las derivadas de mayor orden de la función son igual a 0 para el caso en que $\alpha_i \to \infty$. Sin embargo, observando la expresión correspondiente a la primer derivada, i.e. el gradiente, el signo queda definido por el término $-(q_i^2 - s_i)$. Se desprenden entonces dos casos:

1. Si $q_i^2 - s_i > 0$ entonces $\alpha_i = \infty$ es un mínimo global.
2. Si $q_i^2 - s_i \leq 0$ entonces $\alpha_i = \infty$ es un máximo global.

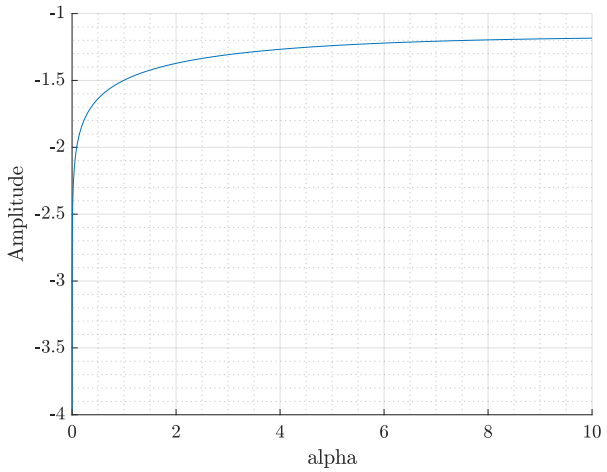


Figura 4.5 – *Marginal Likelihood* para un α_i con $q_i = 1$ y $s_i = 20$

Resta analizar si efectivamente la función de likelihood $\mathcal{L}(\alpha)$ es maximizada al hacerlo para cada α_i por separado. Para ello, se analizan que sucede para el resto de los α_j con $j \neq i$

Análisis para $i \neq j$

Para analizar que sucede para los parámetros distintos a i, se debe analizar la matriz Hessiana; en particular, los elementos que no corresponden a los de la diagonal.

La matriz Hessiana se define como:

$$H(\mathbb{L}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_M} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_M \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_M \partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_M^2} \end{bmatrix}$$

A partir del análisis de las características de la matriz Hessiana en un punto estacionario, es posible determinar la naturaleza del mismo. En particular, un punto estacionario puede clasificarse como:

- Si la matriz es negativa definida en el punto $\boldsymbol{\alpha}_0$, entonces es un máximo global.
- Si la matriz Hessiana es positiva definida en el punto $\boldsymbol{\alpha}_0$, entonces es un mínimo global.
- Si la matriz es indefinida en el punto $\boldsymbol{\alpha}_0$, entonces es un punto de ensilladura.
- Si existe un punto $\boldsymbol{\alpha}_0$ tal que el gradiente evaluado en dicho punto es igual a 0 y la matriz Hessiana es negativa semidefinida, entonces dicho punto es candidato a ser un máximo local, el cual no necesariamente es un máximo global.
- Si existe un punto $\boldsymbol{\alpha}_0$ tal que el gradiente evaluado en dicho punto es igual a 0 y la matriz Hessiana es positiva semidefinida, entonces dicho punto es candidato a ser un mínimo local, el cual no necesariamente es un mínimo global.

De esta forma, es necesario que la matriz Hessiana sea, al menos, negativa semi definida, para poder asegurar que la función de *likelihood* no crezca en las direcciones que no corresponden a los ejes.

Esto fue analizado en [36], donde se llega al resultado de que la matriz Hessiana es semi definida negativa. Esto implica que este método de maximización lleva a un máximo de la función $\mathbb{L}(\boldsymbol{\alpha})$, el cual puede no ser un máximo global.

4.3. Aplicación a señales GPR-UWB

Para el caso de señales GPR-UWB, el modelo utilizado es el que se desarrolló en el capítulo anterior (sección 3.2). En diversos trabajos se analizó esta aplicación: en [41] se realizó un análisis sin utilizar la aproximación de Born; en [42] se aplicó la aproximación de Born; en [43] se aplicó al caso de múltiples frecuencias. Sin embargo, en ninguno de esos casos se realizó un muestreo aleatorio. También se analizó el uso del algoritmo Bayesiano utilizando el modelo de rayos [44]; en este último caso si se realizó el muestreo aleatorio.

A partir de la ecuación (3.65), al tomar mediciones reales se debe tener en cuenta el ruido que agrega el instrumento de medición.

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{y_s}} = \mathbf{E}_{\mathbf{y_s}} + \mathbf{N} \quad \mathbf{N} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma), \tag{4.45}$$

donde $\mathbf{N}$ es ruido aditivo gaussiano de media nula y matriz de covarianza $\Sigma = diag(\sigma^2)$

Teniendo en cuenta que las variables involucradas son complejas, y que para poder aplicar el algoritmo SBL es necesario tener un modelo que sea real, se realiza la siguiente transformación:

$$\Re\{\mathbf{E}_{y_s}\} + j\Im\{\mathbf{E}_{y_s}\} = (\Re\{\mathbf{G}\} + j\Im\{\mathbf{G}\})(\Re\{\mathbf{w}\} + j\Im\{\mathbf{w}\}). \tag{4.46}$$

Igualando parte real con parte real y lo mismo con la parte imaginaria:

$$\begin{cases} \Re\{\mathbf{E}_{y_s}\} = \Re\{\mathbf{G}\}\Re\{\mathbf{w}\} - \Im\{\mathbf{G}\}\Im\{\mathbf{w}\}, \\ \Im\{\mathbf{E}_{y_s}\} = \Re\{\mathbf{G}\}\Im\{\mathbf{w}\} + \Im\{\mathbf{G}\}\Re\{\mathbf{w}\}. \end{cases} \quad n = 1, ..., N \tag{4.47}$$

Por lo tanto, el modelo termina siendo:

$$\begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{E}_{y_s}\} \\ \Im\{\mathbf{E}_{y_s}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{G}\} & -\Im\{\mathbf{G}\} \\ \Im\{\mathbf{G}\} & \Re\{\mathbf{G}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{w}\} \\ \Im\{\mathbf{w}\} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el valor de la estimación de los parámetros será la expectación de la densidad *a posteriori* (ecuación (4.21)):

$$\hat{X}(r) = \mathbb{E}[X(r)] = \Phi\mu, \tag{4.48}$$

donde μ está definida en (4.23).

4.3.1. Implementación numérica y algoritmo

A partir del resultado obtenido en la sección previa, en particular, el de la primera derivada (ecuación (4.41)), el algoritmo seleccionará de forma secuencial las bases que se utilizarán para representar la señal. Esto se hará con el siguiente criterio

- Si la base ϕ_i todavía está en el modelo, es decir, $\alpha_i < \infty$, pero $q_i^2 \leq s_i$, la base ϕ_i debe ser borrada.
- Si la base ϕ_i no se encuentra en el modelo, es decir, $\alpha_i = \infty$, pero $q_i^2 > s_i$, ϕ_i puede agregarse, calculando el valor de α_i óptimo.

Por otro lado, los términos s_i y q_i puede calcularse de forma mas simple. Para ello, se actualiza para cada elemento de la base los siguientes parámetros:

$$S_m = \phi_m^T \mathbf{C}^{-1} \phi_m, \tag{4.49}$$

$$Q_m = \phi_m^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{t}, \tag{4.50}$$

y luego se tiene las siguientes relaciones:

$$s_m = \frac{\alpha_m S_m}{\alpha_m - S_m}, \tag{4.51}$$

$$q_m = \frac{\alpha_m Q_m}{\alpha_m - S_m}. \tag{4.52}$$

Los parámetros S_m y Q_m puede calcularse de forma mas eficiente utilizando la identidad de Woodbury. Definiendo $\mathbf{B} = \sigma^{-2}\mathbf{I}$:

$$S_m = \phi_m^T \mathbf{B} \phi_m - \phi_m^T \mathbf{B} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B} \phi_m, \tag{4.53}$$

$$Q_m = \phi_m^T \mathbf{B} t - \phi_m^T \mathbf{B} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B} t, \tag{4.54}$$

donde las matrices $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Sigma}$ incluyen solo los elementos de la base que están incluidas en el modelo según el criterio mencionado.

Finalmente, algoritmo se detalla a continuación. El parámetro η es el umbral.

Algoritmo 2 Sequential Sparse Bayesian Learning Algorithm

1: **Entradas** $\{\tilde{\mathbf{E}}_{y_s}, \mathrm{G}, \sigma^2_{init}, \eta\}$
2: Inicializar un vector base ϕ_i, $\alpha_i = \frac{||\phi_i||^2}{||\phi_i^T \mathbf{t}||/||\phi_i||^2 - \sigma^2_{init}}$, $\alpha_j = \infty \; \forall \; j \neq i$
3: Calcular $\mathbf{\Sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$, s_m, q_m $\forall$ ϕ_m
4: $i \leftarrow 1$
5: **while** $i > 2$ & $(ML(i) - ML(i-1)) > \eta(ML(i) - ML(1))$ **do**
6: Elegir un ϕ_n
7: Calcular $\theta_n \triangleq q_n^2 - s_n$
8: **if** $\theta_n > 0$ & $\alpha_n < \infty$ **then**
9: Re estimar α_n
10: **else if** $\theta_n > 0$ & $\alpha_n = \infty$ **then**
11: Agregar ϕ_n al modelo y actualizar α_n
12: **else if** $\theta_n \leq 0$ & $\alpha_n \prec \infty$ **then**
13: Eliminar ϕ_n del modelo y actualizar $\alpha_n = \infty$.
14: **end if**
15: Actualizar σ^2 como $\sigma^2 = ||\mathbf{t} - \mathbf{y}||^2 / (N - M + \sum_m \alpha_m \mathbf{\Sigma_{mm}})$ (Opcional)
16: Actualizar $\mathbf{\Sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$ y todos los s_m y q_m.
17: $i \leftarrow i + 1$
18: **end while**
19: **return** $\{\mathbf{w}\}$

donde $ML(i)$ es el máximo valor de la función *marginal likelihood*.

Cabe mencionar que si el paso de la linea 15 se evita, los parámetros calculados en la línea 16 pueden ser calculados en forma eficiente, realizando también de forma secuencial (ver [40]). En el caso en que esto no se haga y se actualice el parámetro, se debe calcular de forma completa (ecuaciones (4.51)-(4.54)).

4.4. Calibración del algoritmo

Para realizar las distintas simulaciones, se utilizó el código desarrollado en [15][1]. Para utilizar el *script*, se debe fijar dos valores: el umbral η a partir del cual se termina el algoritmo y el valor inicial para la varianza σ^2. Realizando distintas simulaciones, se observó que el valor del umbral no es crítico para obtener una buena estimación, mientras que el del valor inicial de σ^2 si lo es. Esto puede deducirse directamente de observar la dependencia que existe en la estimación de los parámetros: es lineal con respecto al valor de σ^2 (ecuación 4.23). Por lo tanto, resulta necesario realizar, previo a utilizar el algoritmo, una calibración; esto es, determinar qué valor inicial puede ser utilizado.

Este análisis fue desarrollado por Olivieri et al. [41], donde se llega a dos conclusiones principales:

- El valor optimo del σ^2 inicial decrece a medida que disminuye la función contraste.
- A medida que aumenta la función contraste, y por lo tanto, el campo de *scattering* se hace cada vez mas fuerte, el valor del σ^2 inicial se vuelve menos crítico.

En base a distintas simulaciones realizadas, se observó un comportamiento en el cual el valor inicial de la varianza del ruido depende fuertemente del rango dinámico de la señal medida. Por lo tanto, a medida que aumenta el valor de la función contraste, mas grande debe ser el valor inicial.

Por dicha razón, se buscó fijar el valor de forma tal que se adapte a la señal medida (similiar a lo propuesto por Tipping [40]). El valor utilizado es

$$\sigma^2_{init} = \text{stdev}(\tilde{\mathbf{E}}_{y_s}) * 0{,}4. \tag{4.55}$$

La obtención de esta forma de calcular el valor de σ^2_{init} fue determinada de forma empírica, ya que fue la que mejor resultados trajo.

4.5. Conclusiones del capítulo

Se presentó brevemente las herramientas mas utilizadas en materia de *Compressed Sensing*, presentando tanto el enfoque determinístico como el aleatorio. Luego, se presentó el algoritmo *Sparse Bayesian Learning*, explicando las principales características y ecuaciones del algoritmo. Finalmente, se adaptó el modelo presentado en el capítulo 3 para poder utilizar el algoritmo aplicado al problema de inversión de nuestro interés.

[1] Se puede encontrar en el link: http://people.ee.duke.edu/~lcarin/BCS.html

Capítulo 5

Resultados

Luego de haber desarrollado dos alternativas posibles para poder reconstruir imágenes, se pasó a realizar simulaciones utilizando las señales generadas con el simulador *gprMax*. Para poder comparar ambos métodos, se realizaron simulaciones en distintas situaciones. En primer lugar, se simuló la reconstrucción de un único cilindro con concreto como *background*(usando el modelo descripto en [45]). Luego, se fue aumentando la complejidad de los escenarios: en uno de ellos se utilizó suelo como *background* y en el otro concreto pero con mas de un blanco. Por último, se aplicaron los dos métodos de reconstrucción al caso en el que se utiliza la antena en lugar del hilo de corriente 2-D, tanto con señales sintéticas como con señales medidas.

Las señales sintéticas utilizadas para la reconstrucción se obtuvieron de la siguiente forma: se simuló cada escenario sin el objeto, de forma tal de obtener el campo incidente, y luego se simuló con el objeto. Teniendo en cuenta la ecuación (3.35), y tal como fue validado en el capítulo 3, realizando la diferencia entre la segunda simulación y la primer simulación (campo total con objeto menos campo total sin objeto) se obtiene el campo de *scattering*. Sin embargo, este método es necesario para el caso en que el blanco se encuentra a una distancia tal que la señal de *scatter* se superpone con la señal compuesta por el campo de camino directo sumado a las reflexiones con la interfaz. En el caso en que los blancos se encuentran lo suficientemente alejados de las antenas, de forma tal que los soportes temporales del campo incidente y del campo reflejado no se superpongan, puede utilizarse la señal directamente sin hacer la resta mencionada. Esto fue lo que se hizo para el caso del escenario 3-D, validando con mediciones reales.

Para todas la simulaciones 2-D donde no se utilizó un objeto conductor, se calculó el error relativo utilizando la siguiente métrica:

$$\eta = \frac{1}{N_{pixel}} \frac{||\hat{X}(x,y) - X(x,y)||_1}{||X(x,y)||_1}. \tag{5.1}$$

Esta métrica es utilizada en la mayor parte de los trabajos relacionadas a *GPR imaging* ([41], [42]), razón por la cual se utilizó.

5.1. Escenarios 2-D

A continuación se detallan las condiciones de simulación que no se modifican en todas las simulaciones (salvo que se mencione en la correspondiente subsección).

- $\delta_x = 0.002\,\text{m}$;
- $\delta_z = 0.002\,\text{m}$;
- $x_{max} - x_{min} = 1\,\text{m}$;
- $z_{max} - z_{min} = 0.3\,\text{m}$;
- $n_{Tx} = n_{Rx} = 51$ para el caso de la inversión a través del operador adjunto. Se tomó este número para cumplir con la limitación calculada en 3.5.2.
- La señal utilizada es la descripta en la sección 2.3.3 (pulso aproximadamente gaussiano modulado en 1.9 GHz).

5.1.1. Escenario con un cilindro solo

El escenario se muestra en las Figuras 5.1 y 5.2. La idea de este primer ejemplo es comparar, para distintas cantidades de Tx/Rx, cómo se comporta el algoritmo Bayesiano al compararlo con el algoritmo del operador adjunto. De esta forma, permitirá extraer conclusiones que facilitarán análisis posteriores en situaciones más cercanas a problemas reales. Por ejemplo, determinar como afecta reducir el número de Tx/Rx en cada algoritmo; esto permitirá acotar el número de variantes posibles en los escenarios posteriores.

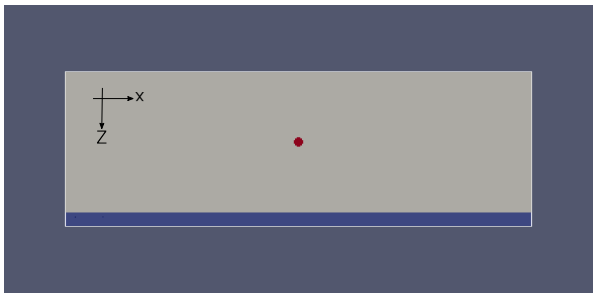


Figura 5.1 – Escenario: dos medios y un cilindro

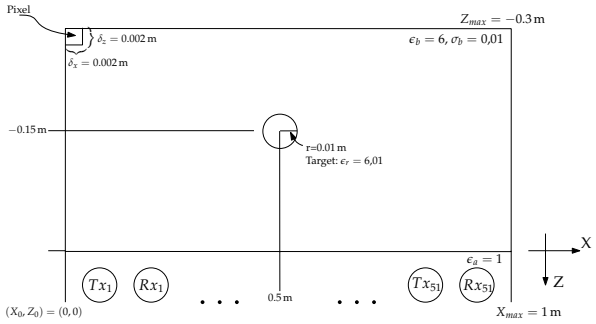
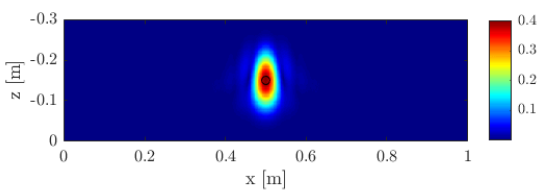


Figura 5.2 – Esquema de medición.

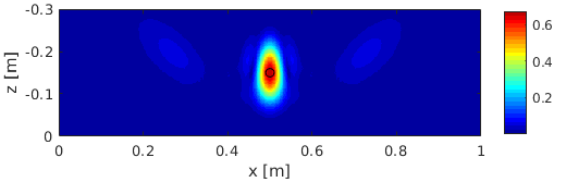
Las condiciones particulares de este escenario son:

- $radio = 0.01\,\text{m}$;
- $\epsilon_b = 6$, $\sigma_b = 0{,}01$;
- $\epsilon_r = 6{,}1$.

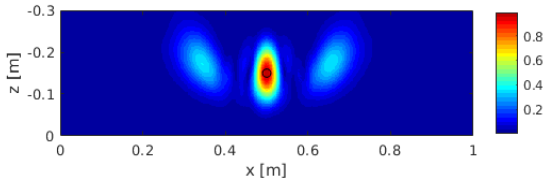
Reconstrucción usando el operador adjunto En primer lugar se utilizó el operador adjunto para reconstruir la imagen. El único caso donde se usaron todas las mediciones disponibles es en la Figura 5.3a.



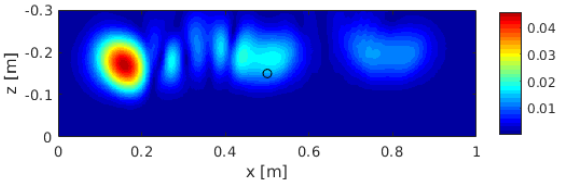
(a) 51 Tx/Rx.



(b) 30 Tx/Rx tomados con un paso fijo.



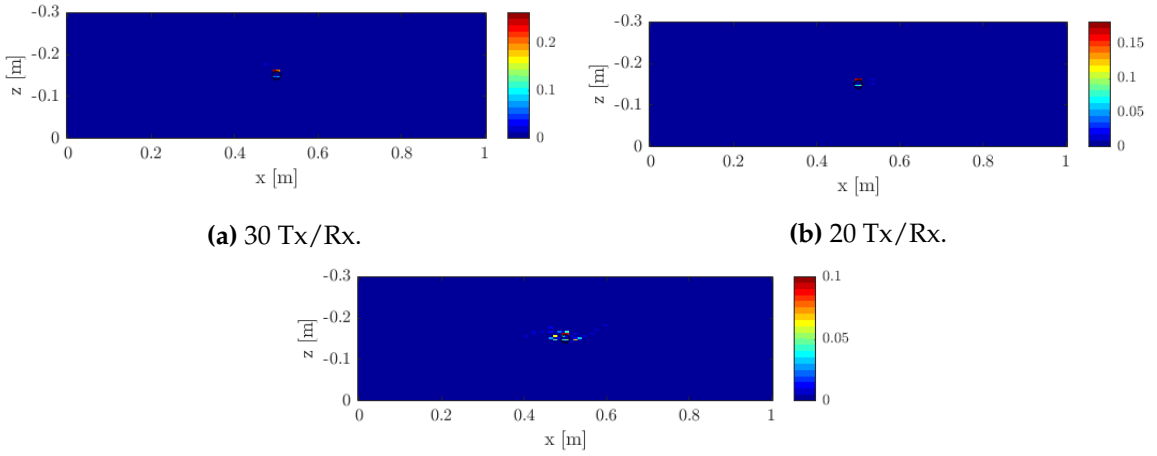
(c) 20 Tx/Rx tomados con un paso fijo.



(d) 20 Tx/Rx tomados de forma aleatoria.

Figura 5.3 – Reconstrucción utilizando el algoritmo 1 (Operador Adjunto)

Reconstrucción con algoritmo SBL Las condiciones de simulación fueron las mismas que con el algoritmo del operador adjunto. Se varío el número de Tx/Rx: se tomaron 30, 20 y 10. Para cada simulación, al ser aleatorio el muestreo (las posiciones de Tx/Rx), se realizó una simulación Monte Carlo para obtener un valor medio. Se simularon 50 realizaciones.



(a) 30 Tx/Rx.

(b) 20 Tx/Rx.

(c) 10 Tx/Rx.

Figura 5.4 – Reconstrucción utilizando el algoritmo 2 (*Sparse Bayesian Learning*)

En primer lugar, se observa que, para el caso del operador adjunto, reducir el número de Tx/Rx a 30 receptores genera la aparición de sombras a los costados del objeto real, generada por el *aliasing*, mientras que para el algoritmo *sparse* esto no sucede.

Por otro lado, el valor de la estimación de la permitividad del objeto da entre 6.2 y 6.1 para el caso del algoritmo Bayesiano, siendo el valor verdadero 6.1, mientras que para el otro caso da 6.4 (El valor absoluto de la función contraste se muestra al costado de cada imagen. El algoritmo SBL da un valor mas cercano al valor verdadero). En ambos casos, la estimación es cercana al valor del verdadero. Otra mejora que introduce el conocimiento *a priori* es la obtención de una reconstrucción con mucha menos dispersión respecto de la obtenida a partir del operador adjunto.

A continuación se muestran los errores obtenidos con ambos métodos. Se observa una mejora utilizando el algortimo SBL tanto en la detección del objeto (reduce el dispersión) como así también en el error obtenido.

Cuadro 5.1 – Error relativo.

Número de Tx/Rx	Reconstrucción Operador Adjunto	Reconstrucción SBL
51	$1{,}9059 \times 10^{-8}$	$1{,}2636 \times 10^{-8}$
30	$4{,}4204 \times 10^{-8}$	$5{,}9729 \times 10^{-9}$
20	$1{,}0980 \times 10^{-7}$	$6{,}0707 \times 10^{-9}$

5.1.2. Concreto con roturas

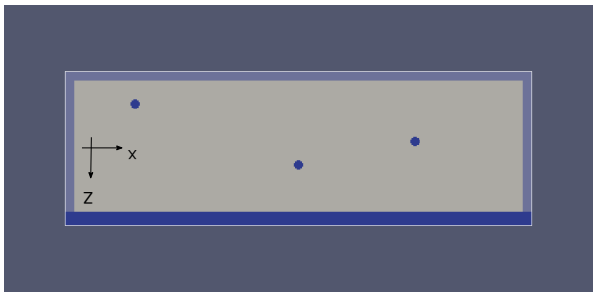
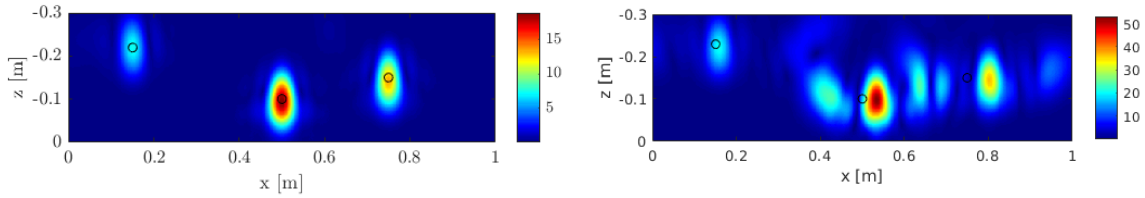


Figura 5.5 – Escenario: dos medios y un cilindro

En este caso, se simuló un escenario de concreto con 3 agujeros de aire. El valor utilizado para la permitividad del concreto es el mencionado en [45]. Las condiciones de simulación son:

- $r_{01} = (0.75\,\text{m}, -0.15\,\text{m})$;
- $r_{02} = (0.5\,\text{m}, -0.1\,\text{m})$;
- $r_{02} = (0.15\,\text{m}, -0.22\,\text{m})$;
- $radio = 0.01\,\text{m}$;
- $\epsilon_b = 6, \sigma_b = 0{,}01$;
- $\epsilon_r = 1$.

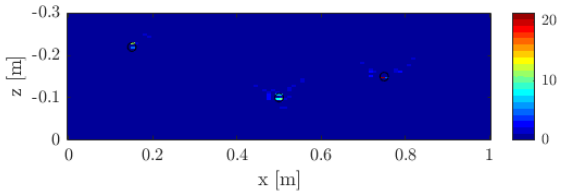
Reconstrucción usando el operador adjunto En primer lugar se realizó la reconstrucción usando el operador adjunto, utilizando todas las mediciones disponibles. Teniendo en cuenta el resultado obtenido en cuanto al número de Tx/Rx obtenido en el escenario previo, en este caso solo se simuló para dos casos. Esto se realizó para terminar de verificar que con el operador adjunto no es posible reducir en mas de la mitad el número de Tx/Rx y obtener una estimación/detección aceptable. En las siguientes figuras se observan la imágenes obtenidas.



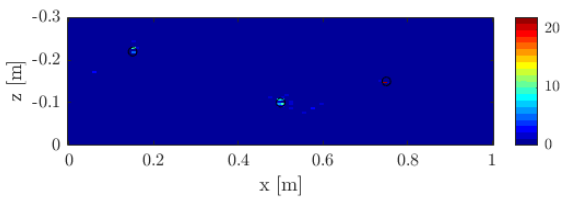
(a) 51 Tx/Rx. **(b)** 20 Tx/Rx

Figura 5.6 – Reconstrucción utilizando el algoritmo 1 (Operador Adjunto)

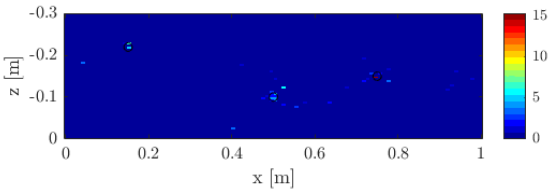
Reconstrucción con algoritmo SBL Se varío el número de Tx/Rx: se tomaron 30, 20 y 10. Para cada simulación, al ser aleatorio el muestreo (las posiciones de Tx/Rx), se realizó una simulación Monte Carlo para obtener un valor medio. Se simularon 50 realizaciones.



(a) 30 Tx/Rx.



(b) 20 Tx/Rx.



(c) 10 Tx/Rx.

Figura 5.7 – Reconstrucción utilizando el algoritmo 2 (*Sparse Bayesian Learning*)

Al observar las imágenes obtenidas junto al valor de la función de contraste, se observa que al utilizar un medio y blancos cuya permitividad es 6 y 1 respectivamente, la aproximación de *Born* deja de ser válida, ya que el campo de *scattering* deja de ser *weak*. Sin embargo, la reconstrucción sigue siendo precisa en terminos de localización aunque no así en la estimación de la permitividad. Además, nuevamente se observa una mejora en la detección al utilizar el algoritmo Bayesiano.

A diferencia del caso anterior, al reducir la cantidad de Tx/Rx, se observa en la Figura 5.7c que al utilizar 10 mediciones (o menos) la reconstrucción deja de ser precisa para ambos casos.

Para el caso del operador Adjunto con 51 Tx/Rx, el error relativo es $1{,}8713 \times 10^{-6}$.

Cuadro 5.2 – Error relativo.

Número de Tx/Rx	Reconstrucción SBL
51	$1{,}9560 \times 10^{-5}$
30	$2{,}1106 \times 10^{-6}$
20	$1{,}5684 \times 10^{-6}$
10	$2{,}2228 \times 10^{-6}$

5.1.3. Concreto con tubo con secciones de aire

En este caso, se simularon dos escenarios, con concreto como *background*: uno con un tubo de ancho 2 cm en la dirección z y el otro con uno de ancho8 cm. Para ambos casos, el tubo tiene una permitividad relativa igual a 6.1. Los agujeros de aire son del ancho del tubo en la dirección Z y en en la dirección x de un largo de 0.2 m y 0.1 m cada uno. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos al reducir el número de Tx/Rx para el caso del operador adjunto, se simuló solo con 51 Tx/Rx.

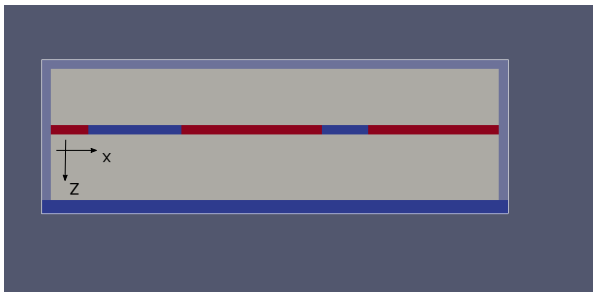
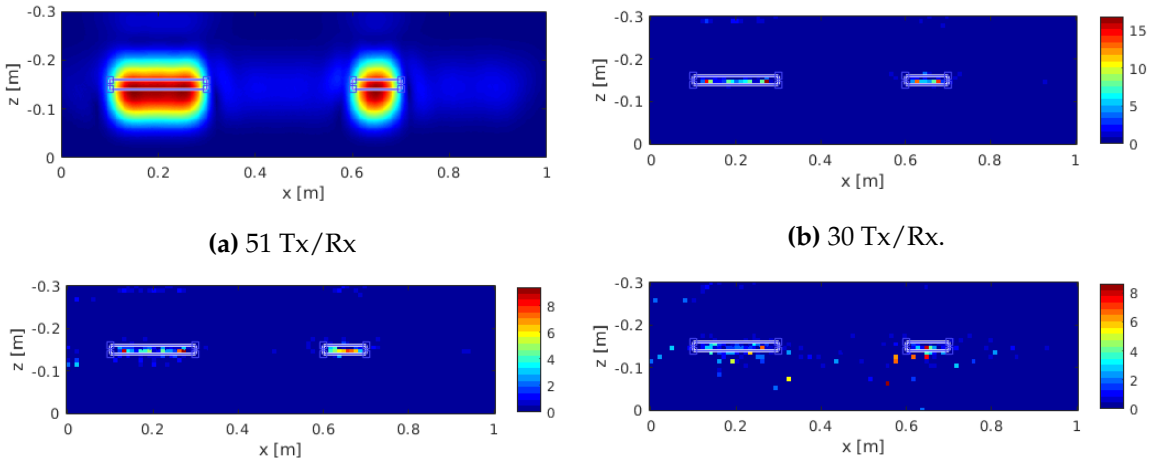


Figura 5.8 – Escenario: dos medios y tubo con roturas

En este escenario se observa que la condición del radio máximo obtenida en la sección 3.5.6 limita la reconstrucción principalmente en la dirección z. Esto se observa al comparar la reconstrucción obtenida para cada tamaño: para el caso de 8 cm en la dirección z no se logra detectar completamente los blancos. Sin embargo, en la dirección x, los blancos a detectar superan dicho tamaño, y aún así se logra detectarlos.

Las condiciones son similares a la primer simulación hecha. Para el caso del operador adjunto se simuló con 51 Tx/Tx mientras que para el algoritmo Bayesiano se varío el número de Tx/Rx: se tomaron 30, 20 y 10.

Caso 1: Cilindro tamaño 2 cm



(a) 51 Tx/Rx

(b) 30 Tx/Rx.

(c) 20 Tx/Rx.

(d) 10 Tx/Rx.

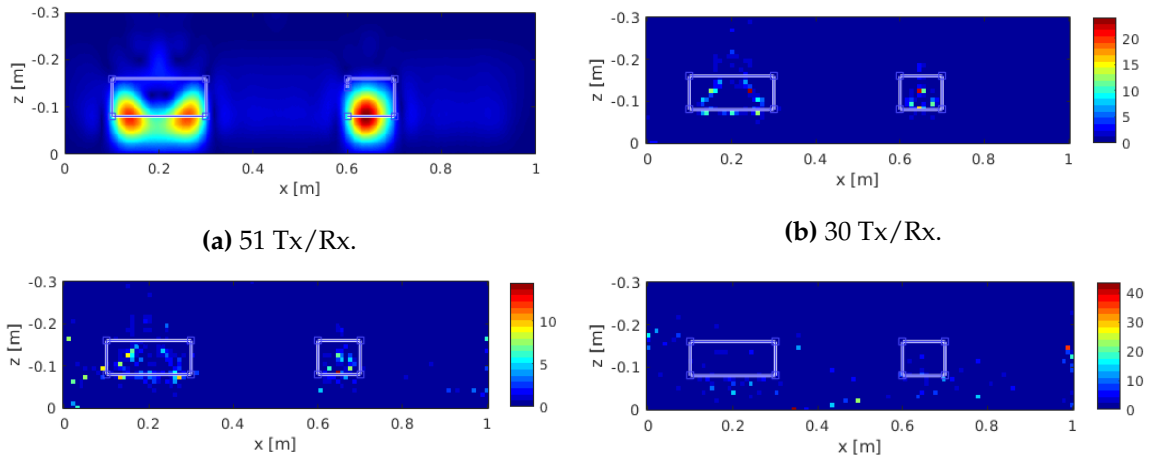
Figura 5.9 – Fig. 5.9a corresponde a la Reconstrucción utilizando el algoritmo 1. El resto corresponde a usar algoritmo 2.

Para el caso del operador Adjunto con 51 Tx/Rx, el error relativo es $1{,}7112 \times 10^{-5}$.

Cuadro 5.3 – Error relativo 2cm.

Número de Tx/Rx	Reconstrucción SBL
51	$1{,}2172 \times 10^{-5}$
30	$7{,}0991 \times 10^{-6}$
20	$7{,}2536 \times 10^{-6}$
10	$9{,}1661 \times 10^{-6}$

Caso 2: Cilindro tamaño 8 cm



(a) 51 Tx/Rx.

(b) 30 Tx/Rx.

(c) 20 Tx/Rx.

(d) 10 Tx/Rx.

Figura 5.10 – Fig. 5.10a corresponde a la Reconstrucción utilizando el algoritmo 1. El resto corresponde a usar algoritmo 2.

Para el caso del operador Adjunto con 51 Tx/Rx, el error relativo es $1{,}7365 \times 10^{-5}$.

Cuadro 5.4 – Error relativo suelo 8cm.

Número de Tx/Rx	Reconstrucción SBL
51	$4{,}0332 \times 10^{-5}$
30	$3{,}1942 \times 10^{-5}$
20	$3{,}1084 \times 10^{-5}$
10	$3{,}4079 \times 10^{-5}$

5.1.4. Suelo

En este caso, se simuló el escenario en el cual el *background* es suelo. El *gprMax* ofrece una funcionalidad para representar el suelo, cuyo modelo puede dividirse en dos partes: la características dieléctricas, donde se debe fijar las cantidades de los materiales que componen el suelo, y las características geométricas, como la heterogeneidad y rugosidad.

En cuanto a la parte dieléctrica (Ver [46] para mayor detalle), el modelo está basado en el modelo de mezclas semi empírico de Peplinski, el cual utiliza ciertas magnitudes que permiten variar las características del suelo. En particular, dichas magnitudes son: fracción de arena, fracción de arcilla, *Bulk density*, densidad de partículas de arena, rango de fracción de densidad de volumétrica de agua. Las ecuaciones para calcular la permitividad compleja a partir de dichas variables se puede hallar en la cita mencionada. El comando para setear la parte dieléctrica del suelo es *#soil_peplinski*.

Por otra parte, el comando *#fractal_box* permite configurar las características geométricas

del medio, además de la riguosidad del mismo. Para ello, introduce un paralelepípedo ortogonal con propiedades fractales relacionadas al material utilizado. Se debe setear el tamaño de la caja, el peso del fractal en cada dirección y el número de materiales para la distribución del fractal de acuerdo al material utilizado. La generación de los fractales se hace de forma aleatoria, pudiéndose utilizar una semilla para el generador de números aleatorios.

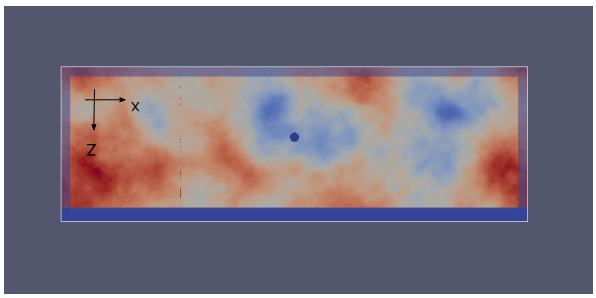


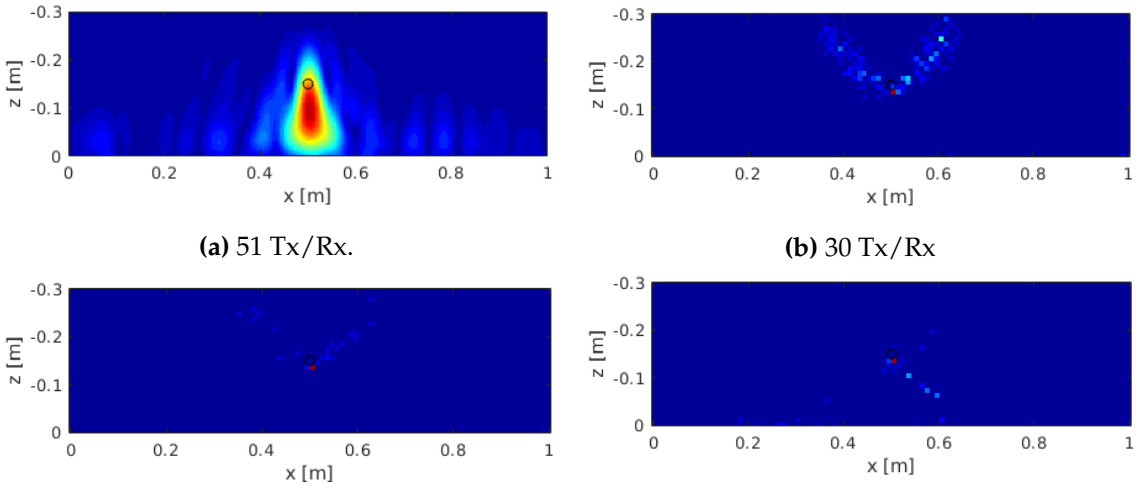
Figura 5.11 – Escenario: Dos medios: aire y suelo, con cilindro. La variación de color representa la variación en la densidad volumétrica de agua.

Las condiciones de simulación son idénticas a las del ejemplo del cilindro, con excepción del medio. Las características del suelo que se utilizan como entrada para el modelo implementado en el *gprMax* son

- Fracción de arena: 0.1
- Fracción de arcilla: 0.9
- *Bulk density*: $1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$
- Densidad de partículas de arena: $2.66\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$
- Rango de fracción de densidad de volumétrica de agua: 0.001 - 0.01

Se simularon 3 escenarios: dos con un cilindro conductor, ubicado a 0.15 m y a 0.25 m de la interfaz respectivamente, y el tercero con un cilindro con una permitividad igual a $\epsilon_r = 6{,}1$. Al utilizar una objeto conductor en los primeros dos escenarios, se quitó de las imágenes la escala de colores.

Escenario 1: Cilindro conductor, ubicado a 0.15 m



(a) 51 Tx/Rx.

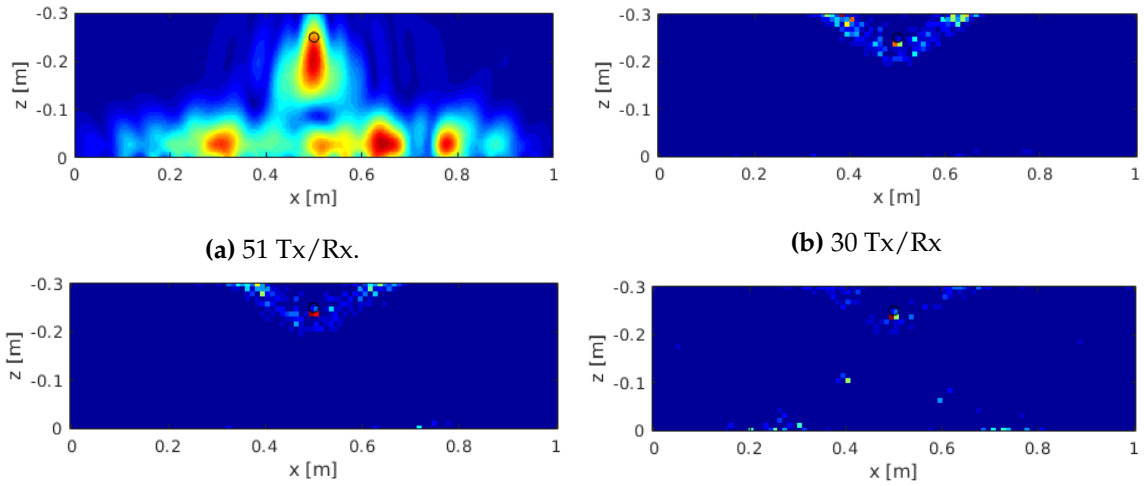
(b) 30 Tx/Rx

(c) 20 Tx/Rx.

(d) 10 Tx/Rx.

Figura 5.12 – Fig. 5.12a corresponde a la Reconstrucción utilizando el algoritmo 1. El resto corresponde a usar algoritmo 2.

Escenario 2: Cilindro conductor, ubicado a 0.05 m



(a) 51 Tx/Rx.

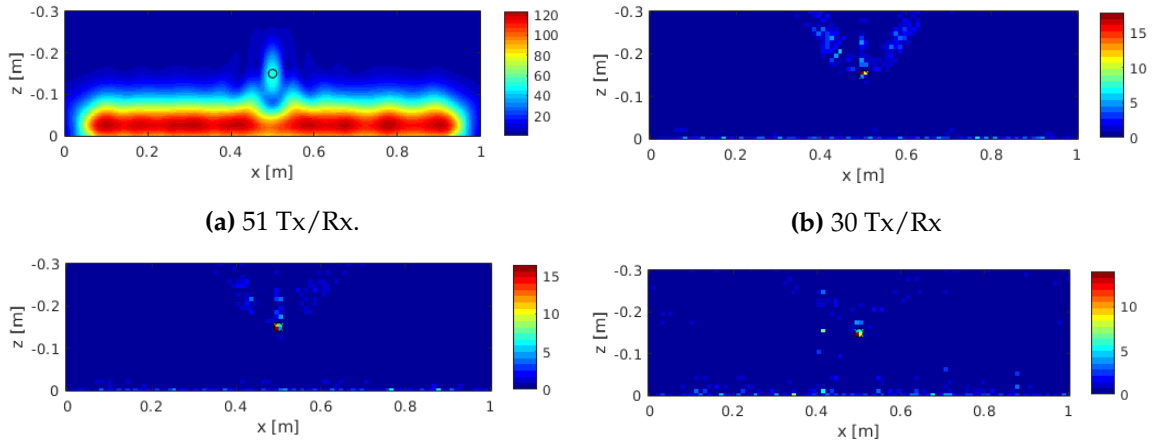
(b) 30 Tx/Rx

(c) 20 Tx/Rx.

(d) 10 Tx/Rx.

Figura 5.13 – Fig. 5.13a corresponde a la Reconstrucción utilizando el algoritmo 1. El resto corresponde a usar algoritmo 2.

Escenario 3: Cilindro con una permitividad igual a $\epsilon_r = 6{,}1$, ubicado a 0.15 m



(a) 51 Tx/Rx.

(b) 30 Tx/Rx

(c) 20 Tx/Rx.

(d) 10 Tx/Rx.

Figura 5.14 – Fig. 5.14a corresponde a la Reconstrucción utilizando el algoritmo 1. El resto corresponde a usar algoritmo 2.

Para este caso, se observa que el mapa de colores no da un orden de magnitud cercano al valor de la función contraste. Esto puede deberse principalmente a las características del suelo.

Al calcular el error obtenido, para el caso del operador adjunto con 51 Tx/Rx se obtuvo un error relativo $1{,}7920 \times 10^{-3}$.

Cuadro 5.5 – Error relativo suelo (Escenario 3).

Número de Tx/Rx	Reconstrucción SBL
51	$2{,}8146 \times 10^{-5}$
30	$3{,}9320 \times 10^{-5}$
20	$2{,}9496 \times 10^{-5}$
10	$2{,}3101 \times 10^{-5}$

Algunas conclusiones pueden sacarse a partir de los resultados obtenidos: en primer lugar, se observa a que a medida que se aleja el cilindro respecto a la interfaz en la dirección Z, más se hace notorio el efecto de la heterogeneidad del suelo. Este efecto se debe a que el campo eléctrico de *scatter*, a medida que el blanco está mas profundo, más se atenúa y se vuelve similar al campo de *scatter* generado por la heterogeneidad del suelo.

En segundo lugar, al comparar la reconstrucción entre el cilindro de material PEC y el cilindro de permitividad $\epsilon_r = 6{,}1$, se observa que para el segundo caso, se nota con claridad el campo eléctrico de *scatter* debido a la diferencias en el suelo. Esto no quita que se puede ubicar la posición del cilindro con precisión, tal como se observa en la Figura 5.14a.

En tercer lugar, se observa que el algoritmo Bayesiano no tiene tan buena performance comparado con los escenarios previos, ya que se observa mayor dispersión. A pesar de eso,

se observan ciertos píxeles de mayor intensidad, donde se ubica el cilindro.

5.2. Escenarios 3-D

Luego de analizar distintos escenarios 2-D, se pasó a estudiar la aplicación del modelo desarrollado en escenarios 3-D, pudiéndose utilizar la antena como fuente.

Teniendo en cuenta que el modelo desarrollado en el capítulo 3 es para escenarios 2-D, se buscó un escenario 3-D con un blanco cuya dimensión en Y sea mucho mayor a las otras, y que exista simetría cilíndrica en el problema.

En primer lugar, se estudió el caso de un blanco en aire, sin interfaz. Se realizaron simulaciones y mediciones reales, comparando los resultados obtenidos en cada caso y demostrando la validez de los algoritmos. En segundo lugar, se simuló un escenario con interfaz. Teniendo en cuenta que el modelo utilizado no fue desarrollado para escenarios 3-D, en este caso se tiene por objetivo unicamente detectar la posición de los blancos.

5.2.1. Cilindro en medio sin interfaz

El escenario utilizado para la simulación presenta las siguientes características:

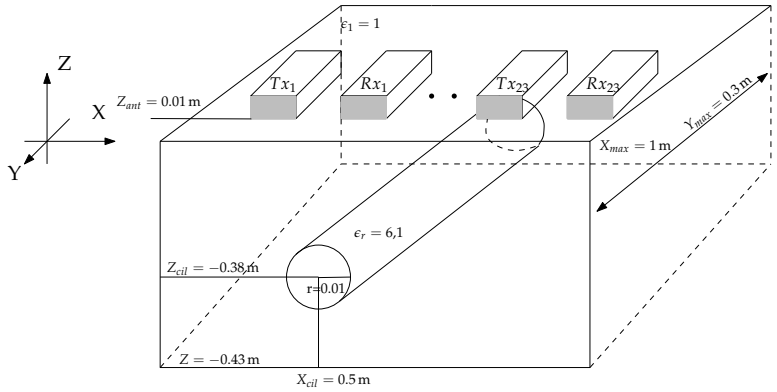
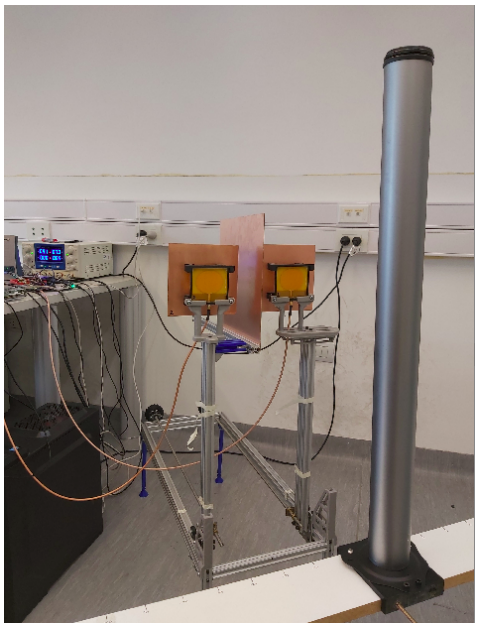


Figura 5.15 – Escenario: 1 medio: aire, con cilindro. Paso utilizado: 0.03 m.

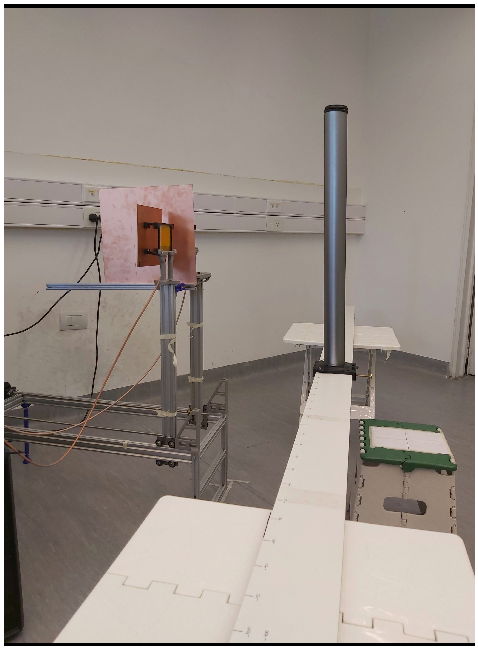
Se utilizó la antena con el plano reflector desarrollada en el capítulo 2; el plano reflector no se incluyó en el esquema 5.15 para simplificarlo. La separación entre la antena Tx y Rx es de 0.12 m. La distancia entre el cilindro y las antenas Tx y Rx es de 0.39 m.

Para el caso de la medición, cambió el tamaño máximo de X e Y, siendo 2 m y 0.7 m respectivamente, el tamaño del cilindro, pasando a 0.03 m y 0.7 m el radio y el largo respectivamente y el número de mediciones, siendo 41, con un paso de 0.05 m. La distancia entre las antenas y el cilindro es de 0.427 m.

En las siguientes imágenes se observa el banco de medición.



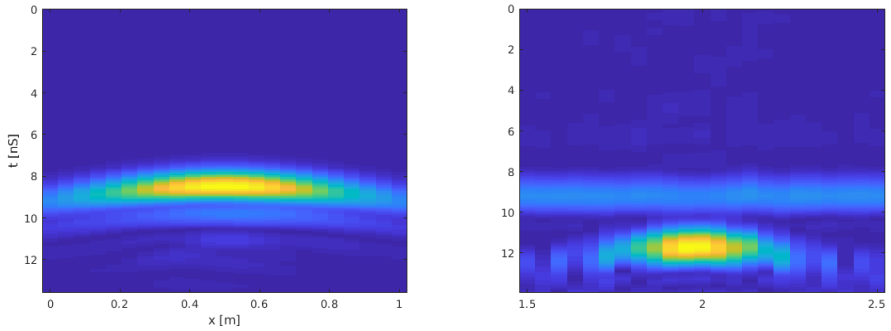
(a)



(b)

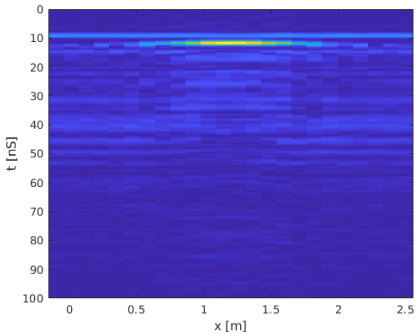
Figura 5.16 – Esquema de medición.

En las Figuras 5.17a y 5.17b se comparan los B-scan obtenidos a partir de la simulación y medición. La señal medida se encuentra en Banda Base mientras que la simulada en Banda pasante. Se debió entonces convertir la señal simulada a BB. Además, en la dirección X se graficó de 0.5 m a 1.5 m, ya que por fuera de dicho intervalo no había información relevante para mostrar, y de esta forma se puede compara entre la señal sintética y la señal simulada (ver Figura 5.17c).



(a) B-scan obtenido a partir de la simulación.

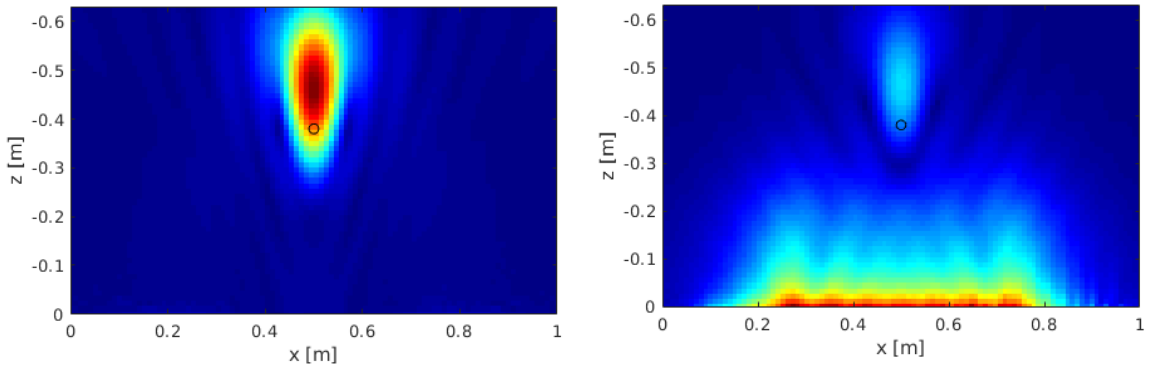
(b) B-scan obtenido a partir de la medición - Zoom.



(c) B-scan obtenido a partir de la medición - Señal completa.

Figura 5.17 – B-scan de la señal sintética y la señal medida.

Reconstrucción usando el operador adjunto Se obtuvieron los siguientes resultados:



(a) Usando el campo de *scattering*.

(b) Usando el campo total.

Figura 5.18 – Reconstrucción utilizando el operador adjunto - simulación.

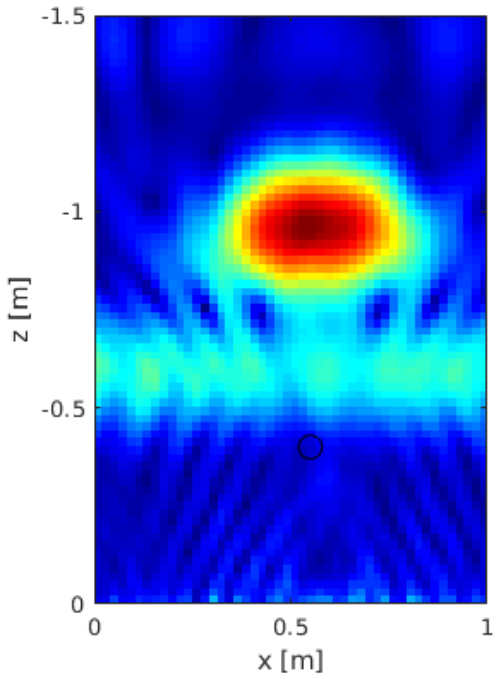
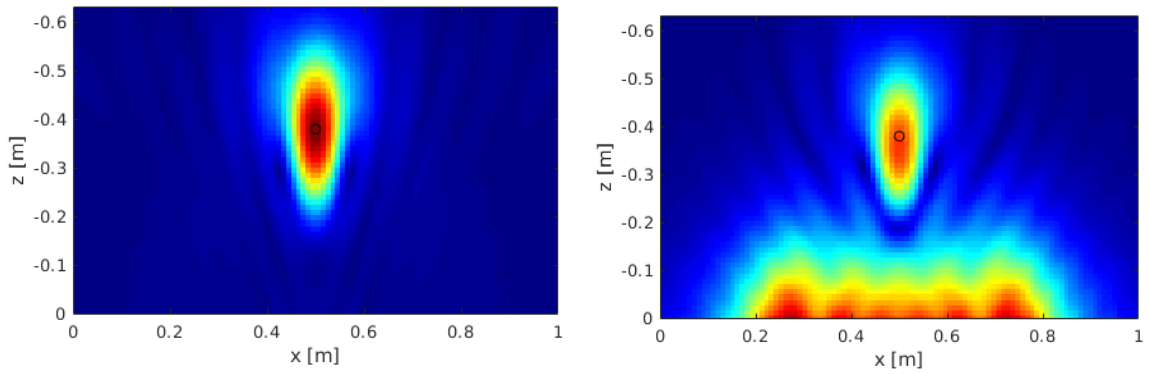


Figura 5.19 – Reconstrucción utilizando el operador adjunto - Medición.

Se observa que tanto para la simulación como para la medición existe un corrimiento en Z: para el caso de la simulación, es de 0.0875 m mientras que para la antena es de 0.55 m. Estos corrimientos se deben a un offset dado por los retardos existentes, tanto por la antena como así también debido a la electrónica (para el caso de la medición).

Por lo tanto, esta simulación/medición puede utilizarse como método de calibración, ya que estimar el *offset* en el dominio temporal puede resultar complejo y poco preciso.

Al corregir la reconstrucción, se obtiene:



(a) Usando el campo de *scattering*.

(b) Usando el campo total.

Figura 5.20 – Reconstrucción utilizando el operador adjunto con *offset* corregido.

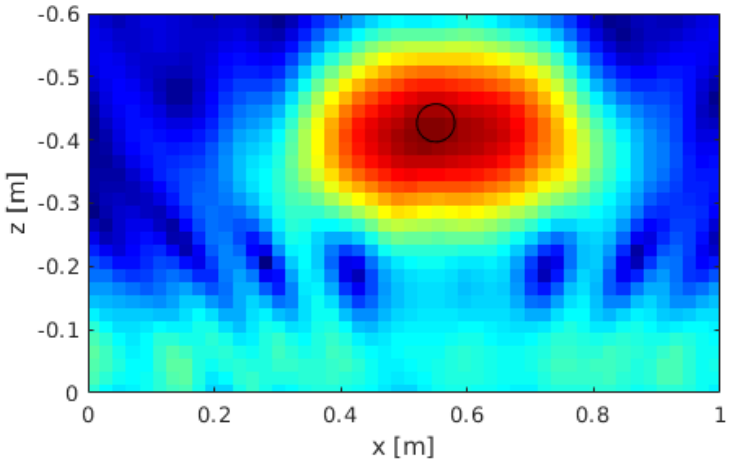


Figura 5.21 – Reconstrucción utilizando el operador adjunto con *offset* corregido- Medición.

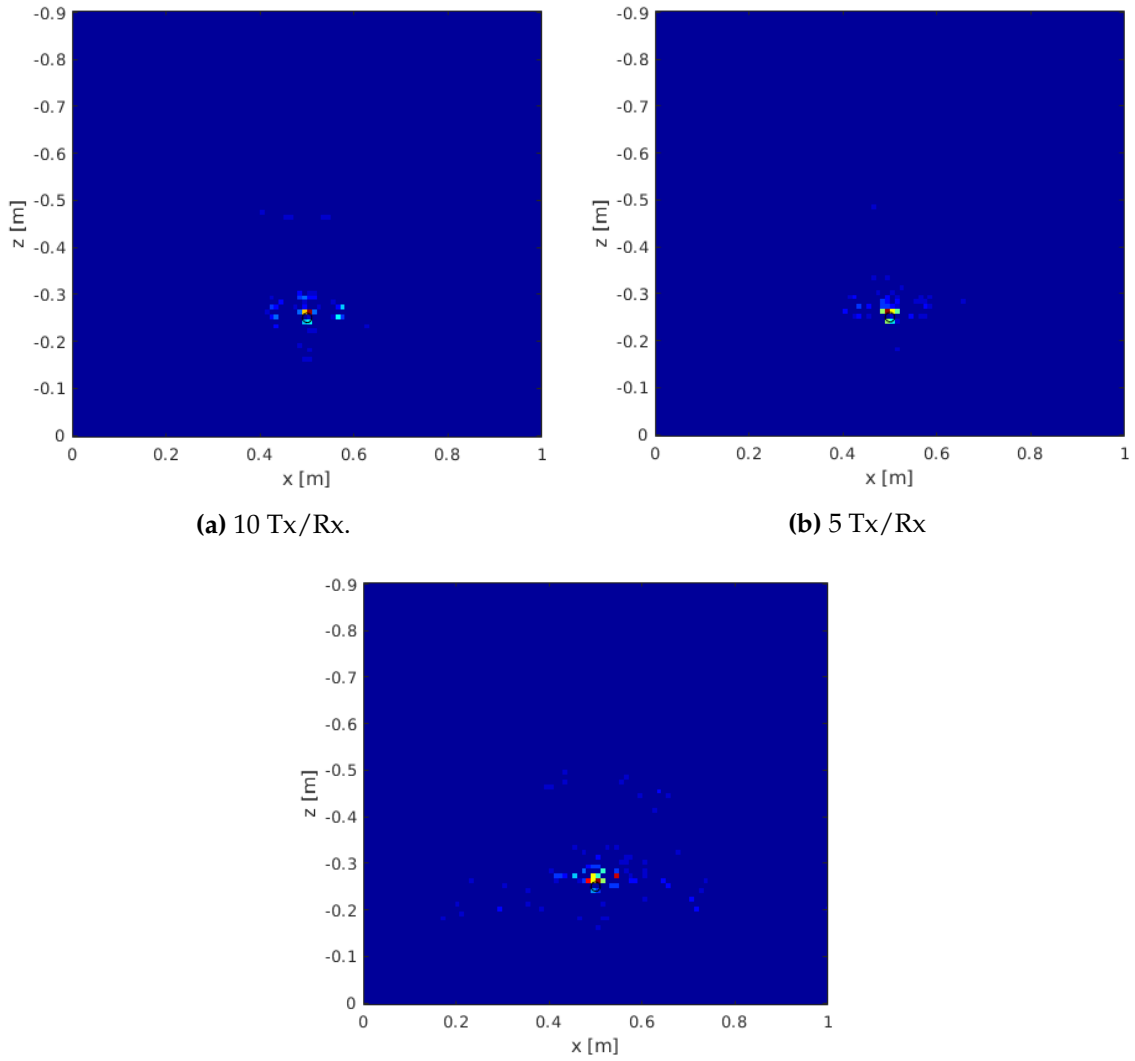
Al hacer el ajuste en Z, se observa que la reconstrucción utilizando las mediciones tiene mayor dispersión respecto a la reconstrucción utilizando la señal sintética.

De ahora en mas, tanto para la simulación como para la medición se corregirá el *offset* obtenidos a partir de este escenario. Dichos corrimientos son entonces:

$Z_{off,sim} \approx 0.0875\,\text{m}$

$Z_{off,med} \approx 0.55\,\text{m}$

Reconstrucción usando el algoritmo SBL Para el caso del algoritmo Bayesiano, se hicieron 3 simulaciones variando el número de Tx/Rx tomados. En el caso de puntos del espectro, se tomaron 15 de forma aleatoria, tomando la menor cantidad de puntos posibles que permitan una reconstrucción correcta.



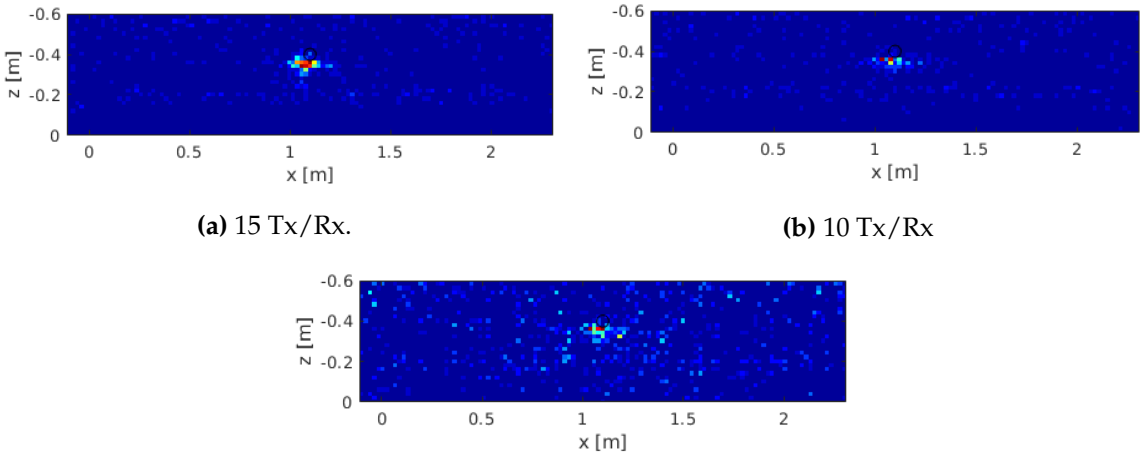
(a) 10 Tx/Rx.

(b) 5 Tx/Rx

(c) 3 Tx/Rx.

Figura 5.22 – Reconstrucción utilizando el algoritmo SBL - señal sintética.

Para el caso de la medición, se hicieron 3 simulaciones variando el número de Tx/Rx (15, 10 y 5). En el caso de puntos del espectro, se tomaron 15 de forma aleatoria, tomando la menor cantidad de puntos posibles que permitan una reconstrucción correcta.



(a) 15 Tx/Rx.

(b) 10 Tx/Rx

(c) 5 Tx/Rx.

Figura 5.23 – Reconstrucción utilizando el algoritmo SBL - señal medida.

5.2.2. Tanque de agua sin interfaz

En este caso se cambió el blanco utilizado en el ejemplo anterior, reemplazando el cilindro por un tanque de agua, cuyo tamaño en X e Y se muestra en la siguiente Figura.

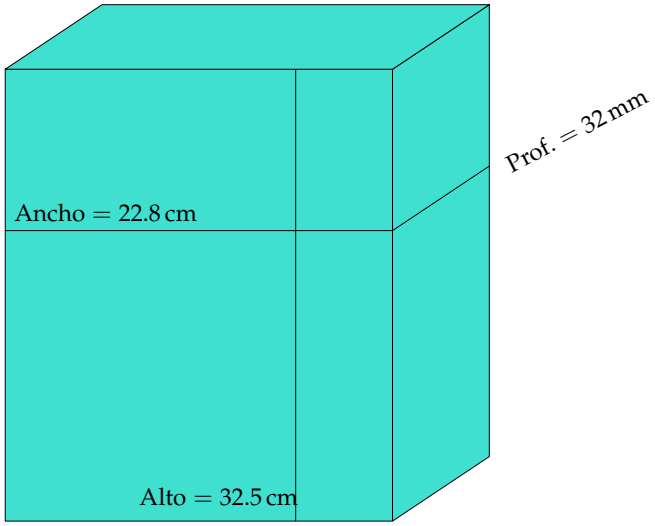


Figura 5.24 – blanco: Tanque de agua - dimensiones.

Además del blanco, respecto del escenario del cilindro cambian el X_{max} y el número de muestras a 1 m y 21 respectivamente.

Reconstrucción utilizando el operador adjunto La reconstrucción obtenida con el operador adjunto se muestra en la siguiente Figura:

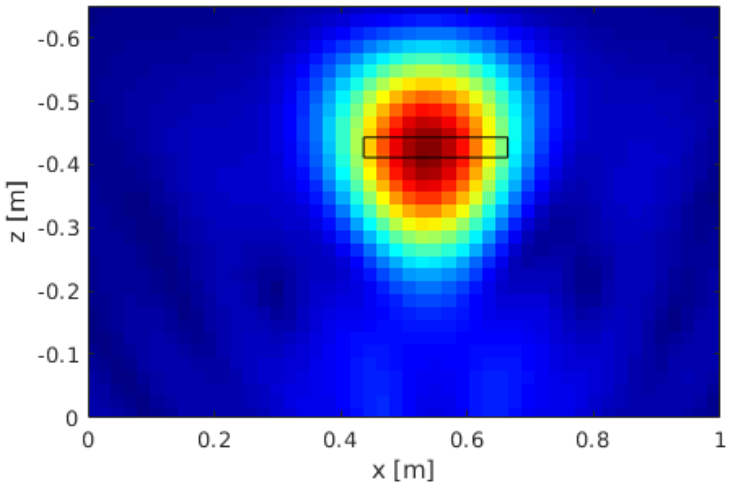
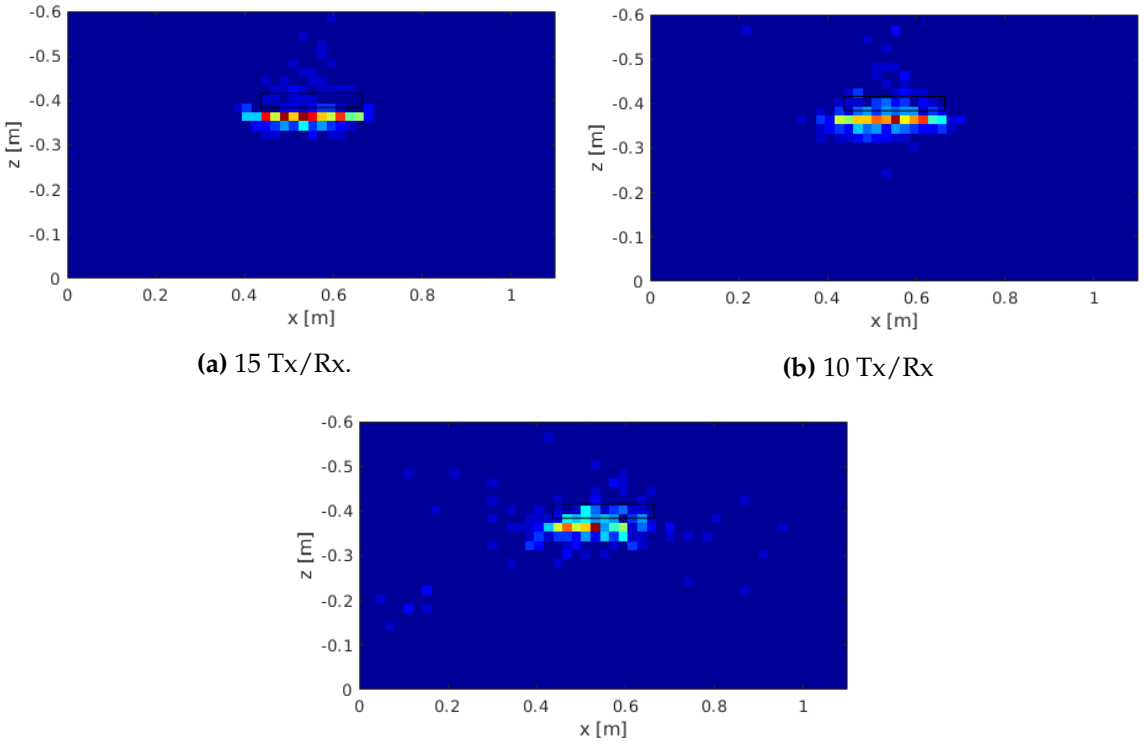


Figura 5.25 – blanco: Tanque de agua - dimensiones.

Reconstrucción utilizando el algoritmo SBL Para el caso del algoritmo Bayesiano, se hicieron 3 simulaciones variando el número de Tx/Rx (15, 10 y 5). En el caso de puntos del espectro, se tomaron 15 de forma aleatoria, tomando la menor cantidad de puntos posibles que permitan una reconstrucción correcta.



(a) 15 Tx/Rx.

(b) 10 Tx/Rx

(c) 5 Tx/Rx.

Figura 5.26 – Reconstrucción utilizando el algoritmo SBL - señal medida.

En este ejemplo se observa una ventaja interesante que presente el algoritmo SBL respecto del algoritmo del operador adjunto: la reconstrucción utilizando el primero captura la geometría del blanco mientras que el segundo no.

5.2.3. Cilindro en medio con interfaz

En este caso, se simuló el escenario que se muestra a continuación.

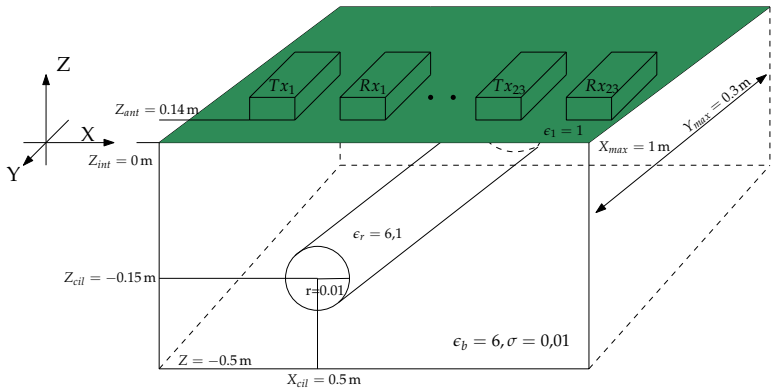


Figura 5.27 – Escenario: 2 medio: aire y concreto, con cilindro. Paso utilizado: 0.03 m.

Solo se utilizaron señales sintéticas ya que no se disponía de escenario real para hacer el experimento.

Reconstrucción usando el operador adjunto Se obtuvieron las siguientes imágenes.

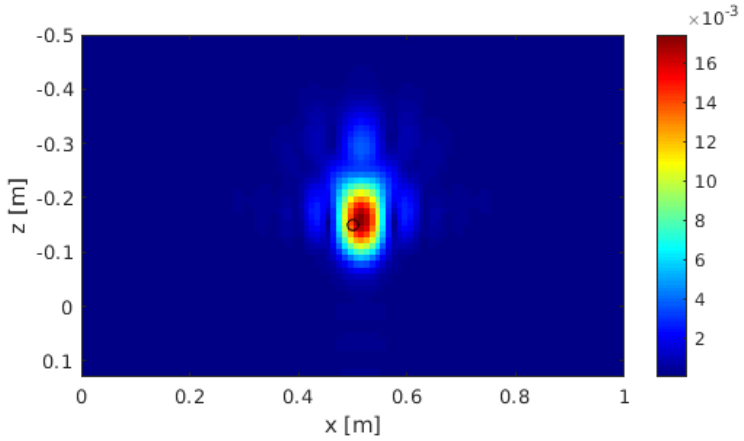
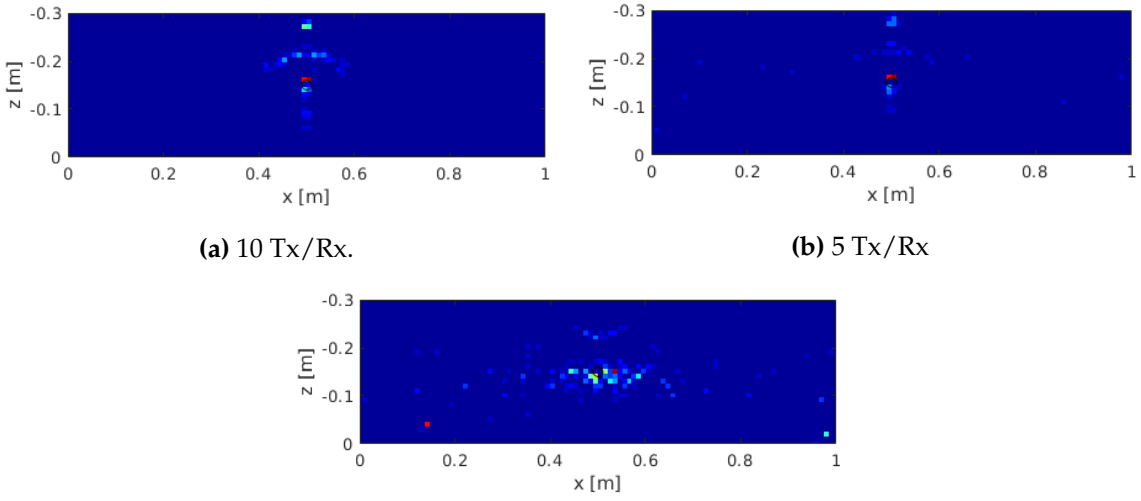


Figura 5.28 – 23 Tx/Rx.

Reconstrucción utilizando el algoritmo SBL Para el caso del algoritmo Bayesiano, se hicieron 3 simulaciones variando el número de Tx/Rx tomados. En el caso de puntos del espectro, se tomaron 15 de forma aleatoria, tomando la menor cantidad de puntos posibles que permitan una reconstrucción correcta.



(a) 10 Tx/Rx.

(b) 5 Tx/Rx

(c) 3 Tx/Rx.

Figura 5.29 – Reconstrucción utilizando el algoritmo SBL, escenario con interfaz - señal sintética.

Nuevamente, se observa que el algoritmo Bayesiano no solo permite disminuir el nú-

mero de mediciones manteniendo una reconstrucción adecuada en posición del blanco, sino también reducir el dispersión del mismo.

5.3. Conclusiones

Se realizaron simulaciones en diversos escenarios, aplicando a dichas señales ambos algoritmos. Se reconstruyeron imágenes que logran detectar la ubicación del blanco, y en los escenarios donde se cumplen las hipótesis de la Aproximación de Born, estimar la permitividad. Además, se analizó el comportamiento de los algoritmos en escenarios 3-D, utilizando tanto señales sintéticas como señales reales. En ambos casos se observó que es necesario una calibración para corregir desplazamientos en la dirección de profundidad. Una vez hecho eso, se logra detectar con buena precisión la ubicación de los blancos.

Se observó además que, para escenarios donde la complejidad aumenta, la *performance* del algoritmo decrece. En particular, en el caso del suelo no heterogéneo es difícil modelar el *background* con una permitividad homogénea.

Capítulo 6

Conclusiones

En la presente tesis se ha desarrollado un entorno de simulación completo. Esto es, desde la generación de señales sintéticas hasta la etapa de reconstrucción de imágenes a partir de la señal de radar. Cada bloque de dicho entorno fue estudiado y validado. Finalmente, se compararon los resultados obtenidos con el simulador frente al uso de señales reales, validando el comportamiento del simulador.

Se analizó el comportamiento del software *gprMax*, aplicándolo a nuestro problema en particular. Para ello, se realizaron diversas simulaciones, incrementando la complejidad de los escenarios. En primer lugar, se validó su comportamiento a través de un escenario 2-D controlado. Para la validación, se desarrolló un *script* que permite calcular la ganancia de una antena. En segundo lugar, luego de validar su comportamiento, se simuló el escenario correspondiente a la antena.

Se estudió de forma completa un modelo electromagnético que describe la señal de *scattering*. Se implementó dicho modelo de forma numérica, utilizando el método de fase estacionaria, que permite realizar cálculo numérico de forma eficiente. Además, a partir del modelo, se analizaron las principales restricciones que existen al momento de diseñar el sistema de adquisición de los datos. Se validó la implementación numérica del modelo generando señales de *scattering* a partir de la función contraste en un escenario conocido y comparando dichas señales contra las obtenidas con el *gprMax*.

Se presentó una breve introducción a las ideas principales de la teoría de sensado comprimido. Esto se utilizó como base para presentar algoritmo *Bayesian Compressive Sensing*, que permite utilizar información *a priori* para regularizar el problema. Luego se aplicó dicho algoritmo a nuestro modelo en particular.

Finalmente, se corrieron los dos algoritmos para diversos escenarios. Esto se hizo tanto para escenarios 2-D como para escenarios 3-D; en este último caso, se utilizaron tanto señales sintéticas como señales reales.

Para el escenario 2-D se demostró, a partir de las simulaciones, que en escenarios donde se cumple con la aproximación de Born la reconstrucción no solo es cualitativa sino también cuantitativa (se obtiene un valor de la permitividad del blanco).

Luego, con el escenario 3-D, se validó el comportamiento de todo el entorno desarrollado al comparar la reconstrucción utilizando señales sintéticas y señales medidas.

6.1. Trabajos futuros

Los resultados obtenidos en esta tesis abren puertas para seguir investigando profundizando.

Por un lado extender el modelo desarrollado en el capítulo 3 a 3-D. Esto permitirá tener un modelo que represente mejor las características del escenario 3-D, posiblemente mejorando la reconstrucción a partir de las señales generadas con la antena. Mas aún, permitirá estimar la función contraste en escenarios donde se cumpla la aproximación de Born.

Por el lado de los algoritmos, se puede investigar variantes del algoritmo SBL. En particular, buscar alternativas para el cálculo de la función *marginal likelihood*. En cuanto a aplicaciones, resulta interesante aplicar el algoritmo SBL en medios estratificados, algo que se ha realizado con algoritmos de sensado comprimido tradicionales pero no con el algoritmo en cuestión.

Apéndice A

Cálculo del cambio de coordenadas

El cálculo de la proyección sobre el versor $\hat{\mathbf{r}}$ (Ec. 2.12) se hace a continuación. Teniendo en cuenta que dicho versor en coordenadas esféricas es $\hat{\mathbf{r}} = \sin(\theta)\cos(\phi)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{z}}$ y que el producto escalar entre $\hat{\mathbf{x}}$ y los otros dos versores es 0 debido a que son ortogonales, el producto escalar entre $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{r}}$ es:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \sin(\theta)\cos(\phi) \tag{A.1}$$

Luego, teniendo en cuenta que la componente x en esféricas es $x = r\sin(\theta)\cos(\phi)$, se tiene:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A.2}$$

Para los otros dos casos, se realiza el mismo desarrollo, obtiéndo:

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A.3}$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A.4}$$

Con lo cual, la componente radial del campo se calcula como:

$$A_r = A_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + A_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + A_z \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A.5}$$

Luego se calcula la proyección en la dirección θ (Ec. 2.13)

El versor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es igual a $\cos(\theta)\cos(\phi)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{\mathbf{y}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{z}}$. Al igual que para el cálculo anterior, al hacer el producto $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}$, la única componente distinta de 0 es la correspondiente a $\hat{\mathbf{x}}$. Entonces, el producto entre ambos versores es igual a $\cos(\theta)\cos(\phi)$, donde $\cos(\phi) = \frac{x}{\rho}$, siendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\cos(\theta) = \frac{z}{r}$. Luego,

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{x}{\rho} \cdot \frac{z}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A.6}$$

Para el producto entre θ e^el desarrollo es el mismo, obteniéndo

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{y}{\rho} \cdot \frac{z}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A.7}$$

Para el caso de z, se tiene que $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin(\theta)$. Utilizando la igualdad entre la expresión de x en coordenadas esféricas y cilíndricas ($x = \rho\cos(\phi) = r\sin(\theta)\cos(\phi)$), se obtiene

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\rho}{r} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A.8}$$

Luego, se calcula la componente en θ como:

$$A_\theta = A_x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + A_y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - A_z \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A.9}$$

Por último, se debe calcular A_ϕ (Ec. 2.14). Realizando el mismo desarrollo que para las otras dos componentes escalares, se obtiene:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{A.10}$$

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{A.11}$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0 \tag{A.12}$$

Entonces, la componente en ϕ se calcula como:

$$A_\phi = -A_x \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + A_y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{A.13}$$

Apéndice B

Cálculo de la función de Green a través de Fourier

La función de Green es la solución a la ecuación de Helmholtz para una fuente puntual. Al obtener la solución para una fuente puntual, luego es posible obtener la solución para una cualquier otra fuente a partir del principio de superposición. Esto se debe a que a la ecuación es lineal, y a que cualquier fuente puede pensarse como una superposición de fuentes puntuales.

Considerando el caso en que las ondas son del tipo TE (Transversal Eléctrico) o TM(Transversal Magnético), la ecuación de Helmholtz vectorial se reduce a una ecuación escalar. Entonces, la función de Green es la solución a la siguiente ecuación escalar:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{B.1}$$

siendo $\mathbf{r}'$ el punto fuente y $\mathbf{r}$ el punto de observación. La solución a la ecuación de onda para una fuente $s(\mathbf{r})$ es:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \tag{B.2}$$

A partir de estas dos soluciones, la función $\psi(\mathbf{r})$ puede calcularse como

$$\psi(\mathbf{r}) = -\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')s(\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}' \tag{B.3}$$

ya que la fuente $s(\mathbf{r})$ puede expresarse como $s(\mathbf{r}) = \int s(\mathbf{r}')\delta(r\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}'$.

Caso 2-D en un medio único

En el caso 2-D, $i(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = i(t)\delta(x - x')\delta(z - z')$. Sea $G(x, z, x', z', t)$ la solución en el dominio temporal de la ecuación de onda escalar inhomogenea para una fuente puntual:

$$\nabla^2 G(x, z, x', z', t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G(x, z, x', z', t)}{\partial t^2} = -i(t)\delta(x - x_0)\delta(z - z_0)\ ,\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{B.4}$$

La función $G(x, z, x', z', t)$ puede expresarse a través de la transformada inversa de Fourier con respecto a las variables k_x y w:

$$G(x - x_0, z - z_0, t) = \int\int G(k_x, z - z_0, \omega)e^{j2\pi k'_x(x-x0)}e^{-j\omega t}\mathrm{d}k'_x\mathrm{d}\omega \tag{B.5}$$

donde se utilizó como kernel de la transformada el mencionado previamente. Si $k_x = 2\pi k'_x$, entonces:

$$G(x - x_0, z - z_0, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega \tag{B.6}$$

Además,

$$i(t)\delta(x - x_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{jk_x(x-x_0)} I(\omega) e^{-j\omega t} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega \tag{B.7}$$

Reemplazando las dos igualdades anteriores en B.4:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\frac{1}{(2\pi)^2} \int \int G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega) - \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int \int G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega \right) = \\ -\frac{1}{2\pi} \int \int e^{jk_x(x-x_0)} I(\omega) e^{-j\omega t} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega \cdot \delta(z - z_0) \end{aligned} \tag{B.8}$$

Operando el término correspondiente al laplaciano, donde la derivada respecto a la variable y es 0, se tiene:

$$\int \int \left(-k_x^2 G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} \right) \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega \tag{B.9}$$

Operando el segundo término, correspondiente a la derivada temporal, se tiene

$$\int \int \left(\frac{\omega^2}{v^2} G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} I(\omega) e^{-j\omega t} \right) \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega \tag{B.10}$$

Luego, reemplazando en la ecuación (B.8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \int \left(-k_x^2 G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} + \right. \\ \left. \frac{\omega^2}{v^2} G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} \right) \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega = -\frac{1}{2\pi} \int \int e^{jk_x(x-x_0)} I(\omega) e^{-j\omega t} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}\omega \cdot \delta(z - z_0) \end{aligned} \tag{B.11}$$

La igualdad anterior se debe cumplir para cualquier dominio de integración, por lo tanto los integrandos deben ser iguales. Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} -k_x^2 G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} + \\ \frac{\omega^2}{v^2} G(k_x, z - z_0, \omega) e^{jk_x(x-x0)} e^{-j\omega t} = -e^{jk_x(x-x_0)} I(\omega) e^{-j\omega t} \cdot \delta(z - z_0) \end{aligned} \tag{B.12}$$

Siendo $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ el número de onda, y además $k^2 = k_x^2 + k_z^2$:

$$k_z^2 G(k_x, z - z_0, \omega) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(k_x, z - z_0, \omega) = -I(\omega)\delta(z - z_0) \tag{B.13}$$

La solución a la ecuación diferencial anterior, para $z \neq z_0$, es

$$G(k_x, z - z_0, \omega) = A(k_x)e^{jk_z(z-z_0)} + B(k_x)e^{-jk_z(z-z_0)} \tag{B.14}$$

Además, se tienen que cumplir las siguientes dos condiciones: la onda debe ser saliente, es decir, se debe tomar $k_z(z - z_0)$ de forma tal que $k_z(z - z_0) - \omega t$ se mantenga constante a medida que aumenta t; y además, se debe cumplir la singularidad en $z = z_0$. Esto, en términos matemáticos, se puede expresar como:

Condición 1:

$$G(k_x, x - x_0, \omega) = \begin{cases} A(k_x)e^{-jk_z(z-z_0)} & \text{si } z < z_0 \\ B(k_x)e^{jk_z(z-z_0)} & \text{si } z > z_0 \end{cases}$$

Condición 2:

$$\begin{cases} \lim\limits_{z \to z_0^+} \dfrac{\partial G(k_x, z - z_0, \omega)}{\partial z} - \lim\limits_{z \to z_0^-} \dfrac{\partial G(k_x, z - z_0, \omega)}{\partial z} = -1 \\ \lim\limits_{z \to z_0^+} G(k_x, z - z_0, \omega) = \lim\limits_{z \to z_0^-} G(k_x, z - z_0, \omega) \end{cases}$$

Reemplazando la condición 1 en la condición 2, se obtiene:

$$\begin{cases} jk_z B(k_x)e^{jk_z(z_0-z_0)} + jk_z A(k_x)e^{-jk_z(z_0-z_0)} = -1 \\ A(k_x)e^{-jk_z(z_0-z_0)} = B(k_x)e^{jk_z(z_0-z0)} \end{cases}$$

De la segunda condición, se obtiene que $A(k_x) = B(k_x)$; y reemplazando en la primer condición se obtiene que $B(k_x) = \frac{j}{2k_z}$. Por lo tanto,

$$G(k_x, z - z_0, \omega) = \frac{j}{2k_z} I(\omega) e^{jk_z|z-z_0|} \tag{B.15}$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación (B.5):

$$G(x - x_0, z - z_0, t) = \int \left(\int \frac{j}{4\pi k_z} e^{jk_z|z-z_0| + jk_x(x-x_0)} \mathrm{d}k_x \right) I(\omega) e^{-j\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{B.16}$$

Caso 2-D con una interfaz

La solución anterior es para un medio general. Para el caso en que existen dos medios presentes, i.e, una interfaz, hay que calcular la función de Green transmitida en el segundo medio. Para ello, teniendo en cuenta que en el eje x es invariante frente a traslaciones y no varía con la interfaz el número de onda, el problema se reduce a calcular la onda transmitida y reflejada en el eje z.

Entonces:

$$e_{1y}(z) = e^{-jk_{1z}(z-z0)} + R\, e^{jk_{1z}(z-z0)} \tag{B.17}$$

$$e_{2y}(z) = T\, e^{-jk_{2z}(z-z0)} \tag{B.18}$$

donde R y T son los coeficientes de reflexión y transmisión, que se pueden calcular como:

$$R = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}} \tag{B.19}$$

$$T = 1 + R \tag{B.20}$$

A partir de estos resultados, la función de Green en el segundo medio puede expresarse como:

$$G(x - x_0, z - z_0, k) = \int \frac{j\, k_1}{4\pi k_z} T(k_x) e^{-jk_{2z}z + jk_{1z}z_0 + jk_x|x-x_0|} \mathrm{d}k_x \tag{B.21}$$

Apéndice C

Análisis de porque la solución es obtenida es *sparse*

La solución obtenida utilizando el algoritmo *Relevance Vector machine* es *sparse* en el sentido que la distribución a posteriori de los coeficientes está concentrada en un cierto conjunto del espacio, dando como resultado que solo unos pocos elementos de la base son utilizados para representar a la señal. Sin embargo, entender porque es *sparse* requiere realizar un análisis mas detallado.

En primer lugar, es importante analizar porque el esquema de la *a priori* jerárquica permite modelar una *a priori* de los parámetros $\mathbf{w}$ que sea efectivamente una distribución *sparse*.

En principio, la justificación de esta elección es la posibilidad de obtener una solución cerrada y que al mismo tiempo cumpla la función equivalente al término de regularización. Sin embargo, la naturaleza *sparse* de esta elección no es fácil de observar a primera vista, ya que la densidad $p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\alpha})$ es una Gaussiana, distribución que en principio no tiene pico que concentre mucha probabilidad alrededor de 0.

Resulta conveniente entonces marginalizar respecto de los hiperparámetros para obtener la 'verdadera' *a priori* [16]:

$$p(w_i) = \int p(w_i|\alpha_i)p(\alpha_i)\mathrm{d}\alpha_i \tag{C.1}$$

El integrando corresponde al producto de una distribución Gaussiana y una Gama, lo que da como resultado una T de Student, una distribución que tiene gran parte de su probabilidad concentrada en 0.

$$p(w_i) = \frac{b^a\Gamma(a+\frac{1}{2})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(a)}\left(b+\frac{w_i^2}{2}\right)^{-(a+\frac{1}{2})} \tag{C.2}$$

Para el caso en que se utilizan a priori no informativas, se observa que la función termina siendo $p(w_i) \propto \frac{1}{w_i}$: esta función se encuentra concentrado alrededor del cero, similar a lo que sucede con la *a priori* Laplaciana. Por lo tanto, con este tipo de a priori un número alto de hiperparámetros tienden a infinito, por lo que la cantidad de elementos $w_i \neq 0$ termina siendo pequeña.

Luego de demostrar que la *a priori* se comporta como un regularizador de tipo *sparse*, resta demostrar que la *a posteriori* de los parámetros es efectivamente una función de densidad *sparse*. Este análisis no puede realizarse de forma cerrada, ya que $p(\mathbf{w}|\mathbf{t})$ es proporcional

al producto de la *a priori*, $p(\mathbf{w})$, la cual no es una Gaussiana y $p(\mathbf{t}|\mathbf{w})$. Se requiere entonces utilizar alguna herramienta.

Esto fue lo que hicieron Wipf et al. [47]. En dicho trabajo proponen re formular el problema desde un punto de vista variacional, lo que permite obtener una cota funcional para la *a posteriori*. A continuación se resume los conceptos fundamentales para entender porque la solución que se obtiene es *sparse* (el desarrollo completo se encuentra en dicho trabajo).

Se propone reescribir la *a priori* en su forma dual para poder obtener una cota inferior de dicha función. Esto es, dada una función convexa $f(y) : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, la forma dual está dada por:

$$f(y) = \sup_{\lambda}[\lambda y - f^*(\lambda)] \tag{C.3}$$

que es equivalente a

$$f(y) \geq \lambda y - f^*(\lambda) \tag{C.4}$$

Para poder hacer esto, la función debe ser convexa, condición que no cumple (ecuación (C.2). Se propone entonces definir $y_i \triangleq w_i^2$ y definir

$$f(y_i) \triangleq \log p(w_i; \mathcal{H}) \tag{C.5}$$

donde $\mathcal{H}$ son los distintos pesos introducidos por la *sparsidad* de la *a priori*, i.e, los hiperparámetros. A partir de esta definición y luego de ciertas transformaciones, se obtiene la siguiente representación:

$$p(w_i; \mathcal{H}) = max_{\gamma_i \geq 0}\left[(2\pi\gamma_i)^{-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{w_i^2}{2\gamma_i}\right) exp\left(-\frac{b}{\gamma_i}\right)\gamma_i^{-a}\right] \tag{C.6}$$

donde $\gamma_i = -\frac{1}{2\lambda_i}, \gamma_i \geq 0$.

$$p(w_i; \mathcal{H}) \geq p(w_i; \hat{\mathcal{H}}) \triangleq (2\pi\gamma_i)^{-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{w_i^2}{2\gamma_i}\right) exp\left(-\frac{b}{\gamma_i}\right)\gamma_i^{-a} \tag{C.7}$$

La idea es entonces utilizar esta cota inferior para acotar $p(\mathbf{w}|\mathbf{t}; \hat{\mathcal{H}})$. Para ello, se debe buscar los parámetros γ_i mas apropiados.

Para la búsqueda de dichos parámetros, se busca que el modelo $\hat{\mathcal{H}}$ coincida en la mayor cantidad de regiones de masa de probabilidad con el modelo verdadero $\mathcal{H}$, para un cierto dado t. Esto en términos matemáticos puede expresarse como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \arg\min_{\hat{\mathcal{H}}} \int |p(\mathbf{w}, \mathbf{t}; \mathcal{H}) - p(\mathbf{w}, \mathbf{t}; \mathcal{H})| \mathrm{d}\mathbf{w} \tag{C.8}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (C.7), el módulo puede sacarse, y por lo tanto el problema puede formularse como

$$\hat{\mathcal{H}} = \arg\max_{\hat{\mathcal{H}}} \int p(\mathbf{w}, \mathbf{t}; \mathcal{H}) \mathrm{d}\mathbf{w}$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \arg\max_{\hat{\mathcal{H}}} \int p(\mathbf{t}|\mathbf{w}) p(\mathbf{w}; \mathcal{H}) \mathrm{d}\mathbf{w} \tag{C.9}$$

Finalmente, teniendo en cuenta la dependencia del modelo con γ_i, el problema queda expresado como:

$$\gamma = \arg\max_{\gamma} \log \int p(\mathbf{t}|\mathbf{w}) \prod_{i=1}^{M} p(\mathbf{w}_i; \mathcal{H}(\gamma_i)) \mathrm{d}\mathbf{w}$$

$$\gamma = \arg\max_{\gamma} -\frac{1}{2}[\log|\Sigma_t| + \mathbf{t}^T \Sigma_t \mathbf{t}] + \sum_{i=1}^{M} \left(-\frac{b}{\gamma_i} - a \log \gamma_i \right) \tag{C.10}$$

donde $\Sigma_t \triangleq \sigma^2 I + \Phi \mathrm{diag}(\gamma) \Phi^T$. El problema de optimización que se tiene es similar al planteado en [16], con la diferencia de que la optimización ahora se está haciendo en el espacio de aproximaciones varacionales para obtener un modelo *sparse*.

A partir de este enfoque, tomando la *a priori* no informativas, se muestra en la siguiente figura la diferencia entre el modelo verdadero y el aproximado.

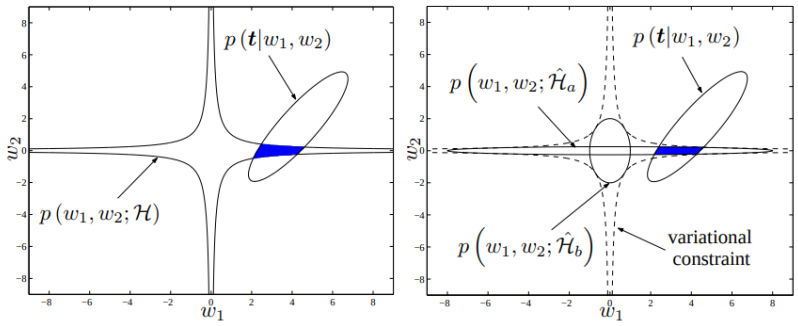


Figura C.1 – Imágen extraida de [47]. Comparación entre la *a posteriori* verdadera (izquierda) y la aproximada (derecha). Las lineas punteadas son las cotas varacionales y la zona oscura es la región donde donde mayor masa de probabilidad acumulada hay.

Lo que se observa en la figura de la derecha es, gracias a las cotas varacionales, los posibles resultados finales se reducen. Esta restricción hace que la *a priori* se intersecte con el likelihood en la zona de mayor probabilidad con la mayor cantidad de $\gamma_i \to 0$. El resultado final es la zona oscura, la cual es una representación *sparse*. Cabe mencionar que este efecto se extrapola a espacios de mayor dimensión, ya que el desarrollo no impone ninguna condición en cuanto a eso.

Bibliografía

[1] Natalia K. Nikolova. *Introduction to Microwave Imaging*. EuMA High Frequency Technologies Series. Cambridge University Press, 2017.

[2] Ahmet S. Hocaoglu Koksal A., Turk and Vertiy Alexey A. *Subsurface Sensing*. John Wiley & Sons, 2011.

[3] Weng Cho Chew. *Waves and fields in inhomogeneous media*. IEEE press, 1995.

[4] Wenji Zhang. Two-dimensional microwave tomographic algorithm for radar imaging through multi layered media. *Progress In Electromagnetics Research*, 144:261–270, 01 2014.

[5] W. Zhang and A. Hoorfar. Mimo ground penetrating radar imaging through multilayered subsurface using total variation minimization. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 57(4):2107–2115, April 2019.

[6] Craig Warren and Antonis Giannopoulos. gprmax user guide. https://buildmedia.readthedocs.org/media/pdf/gprmax/latest/gprmax.pdf, 2019.

[7] Francesco Soldovieri and Raffaele Solimene. Ground penetrating radar subsurface imaging of buried objects. In Guy Kouemou, editor, *Radar Technology*, chapter 6. IntechOpen, Rijeka, 2010.

[8] Q. Huang, L. Qu, B. Wu, and G. Fang. Uwb through-wall imaging based on compressive sensing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 48(3):1408–1415, March 2010.

[9] G. Leone and F. Soldovieri. Analysis of the distorted born approximation for subsurface reconstruction: truncation and uncertainties effects. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(1):66–74, Jan 2003.

[10] Tie Jun Cui, Weng Cho Chew, A. A. Aydiner, and Siyuan Chen. Inverse scattering of two-dimensional dielectric objects buried in a lossy earth using the distorted born iterative method. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39(2):339–346, Feb 2001.

[11] M. Slaney, A. C. Kak, and L. E. Larsen. Limitations of imaging with first-order diffraction tomography. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 32(8):860–874, Aug 1984.

[12] Paul Müller, Mirjam Schürmann, and Jochen Guck. The theory of diffraction tomography, 2015.

[13] Ali C. Gurbuz, James H. McClellan, and Waymond R. Scott Jr. Compressive sensing for subsurface imaging using ground penetrating radar. *Signal Process.*, 89(10):1959–1972, October 2009.

[14] Yonina C. Eldar and Gitta Kutyniok. *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2012.

[15] S. Ji, Y. Xue, and L. Carin. Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(6):2346–2356, June 2008.

[16] Michael E. Tipping. Sparse bayesian learning and the relevance vector machine. *J. Mach. Learn. Res.*, 1:211–244, September 2001.

[17] Jan Wernecke and Roland Wernecke. *Industrial Moisture and Humidity Measurement: A Practical Guide*. 02 2014.

[18] Louis B. Rockland and George Franklin Stewart. Water activity : influences on food quality : a treatise on the influence of bound and free water on the quality and stability of foods and other natural products. 1981.

[19] R. Knochel, A. Gulck, F. Daschner, and O. Schimmer. Uwb-sensors for industrial applications. In *2007 IEEE International Conference on Ultra-Wideband*, pages 529–534, Sep. 2007.

[20] J. Sachs. Handbook of ultra-wideband short-range sensing: Theory, sensors, applications. *Handbook of Ultra-Wideband Short-Range Sensing: Theory, Sensors, Applications*, 12 2012.

[21] M. Kmec, Pavol Galajda, Ralf Herrmann, Kai Schilling, and Stanislav Slovak. Integrated wideband reflectometer with on-line reference measurement capability. pages 83–86, 04 2016.

[22] Andrea Benedetto and Lara Pajewski. *Civil engineering applications of ground penetrating radar*. Springer, 2015.

[23] Chihiro Wakai, Alla Oleinikova, Magnus Ott, and Hermann Weingärtner. How polar are ionic liquids? determination of the static dielectric constant of an imidazolium-based ionic liquid by microwave dielectric spectroscopy. *The Journal of Physical Chemistry B*, 109(36):17028–17030, 2005. PMID: 16853170.

[24] Yen Phuong Pham, Chul-Woong Cho, and Yeoung-Sang Yun. Environmental fate and toxicity of ionic liquids: A review. *Water research*, 44:352–72, 09 2009.

[25] Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3):302–307, May 1966.

[26] Constantine A Balanis. *Antenna Theory: Analysis and Design.* 1997.

[27] Juan Carlos Fernandez. *Ingeniería Electromagnética: Modelos estáticos y circuitales*. Eudeba, 2013.

[28] Nectaria Diamanti and Peter Annan. Characterizing the energy distribution around gpr antennas. *Journal of Applied Geophysics*, 99:8390, 12 2013.

[29] Mario Bertero and Patrizia Boccacci. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. 1998.

[30] Gary F. Margrave and Michael P. Lamoureux. *Numerical Methods of Exploration Seismology: With Algorithms in MATLABő*. Cambridge University Press, 2019.

[31] Xudong Chen. *Computational Methods for Electromagnetic Inverse Scattering*. Wiley, 2018.

[32] Raffaele | Persico. *Introduction to Ground Penetrating Radar*. IEEE press, 2014.

[33] Adjoint operator in hilber space. https://www.oulu.fi/sites/default/files/content/files/operator.pdf.

[34] Y. L. Liu, L. L. Li, and F. Li. Imaging of two-dimensional targets buried in a lossy earth with unknown characteristics from multi-frequency and multi-monostatic data. *IET Microwaves, Antennas Propagation*, 4(10):1647–1653, October 2010.

[35] D. L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(4):1289–1306, April 2006.

[36] Anita C. Faul and Michael E. Tipping. Analysis of sparse bayesian learning. In *Proceedings of the 14th International Conference on Neural Information Processing Systems: Natural and Synthetic*, NIPS'01, pages 383–389, Cambridge, MA, USA, 2001. MIT Press.

[37] James O. Berger. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. 1988.

[38] D. J. C. MacKay. Comparison of approximate methods for handling hyperparameters. *Neural Computation*, 11(5):1035–1068, July 1999.

[39] Felix Lucka. Fast markov chain monte carlo sampling for sparse bayesian inference in high-dimensional inverse problems using l1-type priors. *Inverse Problems*, 28(12):125012, nov 2012.

[40] Michael Tipping and Anita Faul. Fast marginal likelihood maximisation for sparse bayesian models. pages 3–6, 01 2003.

[41] G. Oliveri, P. Rocca, and A. Massa. A bayesian-compressive-sampling-based inversion for imaging sparse scatterers. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(10):3993–4006, Oct 2011.

[42] L. Poli, G. Oliveri, and A. Massa. Microwave imaging within the first-order born approximation by means of the contrast-field bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 60(6):2865–2879, June 2012.

[43] Lorenzo Poli, Giacomo Oliveri, Ping Ping Ding, Toshifumi Moriyama, and Andrea Massa. Multifrequency bayesian compressive sensing methods for microwave imaging. *J. Opt. Soc. Am. A*, 31(11):2415–2428, Nov 2014.

[44] R. Karlina and Motoyuki Sato. Modified bayesian algorithm implemented in compressive sensing applied to spatially sampled gpr measurement under high clutter conditions. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, 9:121–136, 01 2018.

[45] Antonis Giannopoulos. gprmax 2d/3d. https://www.gprmax.com/code/UserGuideV2.pdf, 2005.

[46] Iraklis Giannakis. *Realistic numerical modelling of ground penetrating radar for landmine detection*. PhD dissertation, The University of Edinburgh, 2016.

[47] Jason Palmer, Bhaskar D. Rao, and David P. Wipf. Perspectives on sparse bayesian learning. In S. Thrun, L. K. Saul, and B. Schölkopf, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems 16*, pages 249–256. MIT Press, 2004.